Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants

Fabrice Vandebrouck

UNIVERSITE PARIS DIDEROT

Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants

Fabrice Vandebrouck

Note de synthèse pour une habilitation
à diriger des recherches

Soutenue le lundi 28 novembre 2011
devant le jury

Ferdinando Arzarello, Professeur, Université de Turin
Isabelle Bloch, Professeur, Université Bordeaux 4, IUFM d'Aquitaine
Alain Kuzniak, Professeur, Université Paris Diderot
François Pluvinage, Professeur, IPN Cinvestav Mexico
Aline Robert, Professeur, Université de Cergy Pontoise

Introduction

L'ensemble des travaux présentés ici porte sur l'enseignement de l'Analyse[1], du lycée à l'université, avec un focus sur l'usage des nouvelles technologies pour cet enseignement. Plus précisément, nous nous intéressons aux potentialités et aux difficultés, pour les élèves et pour les enseignants, de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des fonctions, du lycée jusqu'aux premières années de l'université. La question qui organise les recherches est la difficulté des étudiants au début de l'université à entrer dans la démarche de l'Analyse avec toutes ses spécificités (en particulier l'adoption d'une perspective locale sur fonctions, plus généralement la formalisation et la quantification symbolique). Nos recherches se sont développées essentiellement en amont, au niveau du lycée. Elles portent sur l'enseignement de l'Analyse du lycée à l'université, sur le renouvellement des contenus d'enseignements attachés aux fonctions numériques, sur les apprentissages des élèves et des étudiants avec les nouvelles technologies, sur la démarche expérimentale et enfin sur les pratiques des enseignants désirant intégrer ces technologies dans leurs classes.

Pour étudier ces questions, nous nous plaçons dans le cadre général de la théorie de l'activité, constitué dans une lignée de recherche qui articule les apports de Piaget et Vygotsky pour enrichir une approche développementale des pratiques enseignantes et une approche par la conceptualisation des apprentissages mathématiques des élèves (Vergnaud 1999/2002, Vergnaud 1996, Leplat 1997, Rogalski 2008).

Dans ce cadre, nous reprenons les outils théoriques proposés par Robert (2008) qui spécifie divers éléments des théories de l'apprentissage aux mathématiques et à la situation scolaire : les apprentissages des élèves et des étudiants sont appréhendés par l'intermédiaire d'analyses de leurs activités[2] en classe, elles-mêmes caractérisées par les mises en fonctionnement de connaissances mathématiques qu'ils sont amenés à faire, à partir des tâches qui leurs sont proposées, des modes de travail et des aides de l'enseignant. Les apprentissages sont référés à la conceptualisation visée, elle-même définie à partir des spécificités des notions mathématiques, des programmes d'enseignement et des difficultés des élèves. Les interventions des enseignants sont partie prenante de ces analyses et pour mieux les caractériser, en cerner les contraintes et les marges de manœuvre, nous reprenons également le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes proposé par

---

[1] Nous entendons par Analyse mathématique le domaine des mathématiques dont les objets de base sont les nombres réels, les suites, les fonctions et comprenant tous les problèmes mettant en jeu ces objets mathématiques.

[2] Le singulier sera utilisé dans une acception générique : l'activité de l'élève étant constituée de l'ensemble de ses activités contextualisées

Robert et Rogalski (2002) : les pratiques des enseignants sont certes étudiées en fonction de leur but, l'apprentissage mathématique des élèves, mais aussi en considérant qu'elles se déploient dans l'exercice d'un métier qui les contraint de diverses manières. Elles sont décrites suivant cinq composantes : cognitive, médiative, institutionnelle, sociale et personnelle. La méthodologie est publiée en détail dans l'ouvrage Vandebrouck (2008b) avec les contributions majeures d'A. Robert et J. Rogalski.

Le corps de nos recherches porte sur l'intégration des technologies dans l'enseignement, du point de vue des activités et des apprentissages des élèves (repris dans le chapitre 2 de la note de synthèse) et du point de vue des pratiques enseignantes (repris dans le chapitre 3). Le chapitre 2 permet ainsi de préciser les développement théoriques que nous avons apportés pour analyser et concevoir des situations d'apprentissage avec les nouvelles technologies, inscrites dans notre objectif de l'enrichissement des acquisitions en Analyse au lycée, en relation avec la première année d'université. Le chapitre 3 permet de montrer les prolongements de la double approche au sein de la théorie de l'activité pour l'étude des pratiques enseignantes en situation d'usage des nouvelles technologies. Le chapitre 1, servant de préalable à un certain nombre de choix du chapitre 2, porte quant à lui sur les difficultés des étudiants en ce qui concerne l'entrée dans la démarche d'Analyse à la transition lycée-université.

Ainsi dans le chapitre 1, nous reprenons nos travaux pour interroger les difficultés des étudiants entrant à l'université afin de pouvoir mieux les préparer par un travail en amont (au lycée) à l'aide des nouvelles technologies. Dans les chapitres 2 et 3, les technologies sont donc envisagées dans l'enseignement avec comme arrière-plan ce projet d'enrichir le travail des élèves sur les fonctions du lycée à l'université.

Avant de développer ces points, nous soulignons que ces recherches n'auraient pas été possibles sans la collaboration fructueuse avec de nombreux chercheurs du LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz), de la CI2U (Commission Inter Irem Université) et aussi des professeurs de l'enseignement secondaire au sein de l'IREM de Paris (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). En particulier, les recherches sur le thème des fonctions sont nourries par les travaux collectifs menés au sein du « groupe sup » et de la CI2U. Les recherches sur le thème des technologies sont nourries par les projets nationaux et européens auxquels nous avons pu participer, en particulier les projets Ile de France, Gupten (Genèses d'Usage Professionnels des Technologies chez les Enseignants), Remath (Representing Mathematics with digital media) et Edumatics (European Development for the Use of Mathematics Technology in Classroom). Enfin, les recherches sur les pratiques enseignantes en environnement technologies ont été possibles en lien avec les travaux menés dans le sous groupe « pratiques » du LDAR et dans le groupe IREM « démarche expérimentales et TICE au lycée ».

LEPLAT J. (1997) *Regards sur l'activité en situation de travail*, Paris: PUF.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59-68). Toulouse: Octarès Edition.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4). pp 505-528.

ROGALSKI J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.23-30). Toulouses: Octarès Editions.

VANDEBROUCK F. (Eds) (2008) La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants, Toulouses: Octarès.

VERGNAUD G. (1996) Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds.) *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.174-185). Clermont-Ferrand: IREM.

VERGNAUD G. (1999/2002) On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget. Dans Y. Clot (Eds.) *Avec Vygotski* (pp.55-68). Paris: La dispute.

Chapitre 1 : Transition lycée-université pour les études de fonctions

Dans ce premier chapitre, nous proposons un travail sur la transition lycée-université et sur les difficultés des étudiants en ce qui concerne l'entrée dans la démarche de l'Analyse. Ce thème a été très étudié depuis plusieurs décennies (Robert 1982, 1983, Artigue 1991, Robert 1998, Artigue, Batanero et Kent 2007 ou Gueudet 2008) mais les caractéristiques, sans cesse changeantes, des populations étudiantes arrivant à l'université d'une part (en particulier les difficultés des élèves) et des contenus d'enseignements d'autre part, tant au lycée qu'à l'université, justifient que l'on s'y intéresse de façon continue et renouvelée. Tous les résultats de ce chapitre sont publiés dans Vandebrouck (2011) et ont fait l'objet de communications avec la Commission Inter Irem Université (par exemple Vandebrouck 2008a)

Bien souvent, les étudiants entrant à l'université ne savent pas manipuler des fonctions qui ne sont pas définies par une formule algébrique. Or la démarche d'Analyse est une démarche fondamentalement différente de la démarche algébrique. Elle impose un nouveau point de vue sur l'égalité des nombres réels qui est l'égalité si les deux réels sont arbitrairement proches. Les techniques qui sont attachées à l'Analyse relèvent de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires et elles mettent en jeu pour beaucoup les propriétés locales des fonctions (notamment les limites). Mais lors de ces études locales, les étudiants traitent algébriquement les équivalents ou les développements limités, donnant très difficilement du sens aux expressions du type $o(x)$, $O(x)$… Enfin, les étudiants ne tracent des graphes que quand la question leur est explicitement demandée et ils ne pensent pas spontanément à utiliser cette représentation des fonctions pour faire les raisonnements locaux attendus d'eux. Notre travail consiste donc à interroger leurs difficultés afin de mieux pouvoir y remédier par un travail en amont et un travail au début de l'université.

Nous introduisons trois domaines de travail qui traversent la scolarité actuelle de la classe de troisième aux premières années de l'université et qui sont associés à certaines conceptualisations de la notion de fonction. Ces domaines de travail sont définis à partir des programmes d'enseignement, de manuels et de pratiques enseignantes. A partir de ces domaines de travail, les connaissances et les mises en fonctionnement qu'ils valorisent, nous questionnons ces conceptualisations, ou plutôt les conceptions des étudiants entrant à l'université relativement à la notion de fonction (au sens de la théorie des champs conceptuel, Vergnaud 1991). Nous donnons une interprétation en termes de perspectives de leurs difficultés pour entrer dans la démarche d'Analyse attendue d'eux à ce niveau. Par perspectives, nous entendons des points de vue spécifiques dans le travail sur les fonctions, associées aux trois types de propriétés des fonctions : ponctuelles, globales et locales.

Nous commençons dans la première partie par une étude didactique de la notion de fonction et des difficultés liées à cette notion, déjà pointées dans les travaux de recherche sur le sujet. Nous menons en particulier une discussion sur les représentations des fonctions et les différentes perspectives que l'on peut adopter dans le travail sur les fonctions. Nous continuons dans la deuxième partie en définissant trois domaines de travail pour l'étude des fonctions, spécifiques d'une part des pratiques au lycée et d'autre part des pratiques attendues à l'université. Dans la partie 3, nous rendons compte de travaux de recherches sur les conceptions des élèves de terminale et des étudiants du début de l'université, ainsi que de notre interprétation en termes de perspectives des difficultés en Analyse à la transition lycée-université.

1. Les fonctions à la transition lycée-université

De nombreuses différences peuvent être identifiées à un niveau très général entre le secondaire et le supérieur : passage d'un cours avec un seul enseignant à des cours magistraux en amphithéâtre et à des travaux dirigés ; modularisation des enseignements qui peut contribuer à isoler les connaissances les unes des autres... En didactique des mathématiques, nous pointons également des différences liées aux contenus mathématiques en jeu, ce qui fait l'objet du paragraphe 1a. Dans le paragraphe 1b, nous étudions la complexité de la notion de fonction et sa conceptualisation dans notre cadre théorique. Dans le paragraphe 1c, nous exposons des approches complémentaires, en didactique des mathématiques, pour penser cette conceptualisation de la notion de fonction à la transition lycée université. Enfin, dans le paragraphe 1d, nous nous focalisons sur le rôle des perspectives dans la conceptualisation et leurs liens avec les représentations.

1.a Quelques caractéristiques générales liées aux mathématiques

De nombreuses études ont déjà précisé des caractéristiques de cette transition (Robert 1998, Artigue, Batanero et Kent 2007, Gueudet 2008). Par exemple, Robert (1998) a pointé l'introduction à l'université d'un nouveau type de notions mathématiques : les notions à la fois Formalisatrice, Unificatrices et Généralisatrices (FUG), spécifiquement toutes les notions d'algèbre linéaire : espace vectoriel, application linéaire… ces notions permettent en effet d'introduire plus de généralité, en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme, qui de fait simplifie les écritures mais peut aussi brouiller le sens pour les étudiants. Les notions de topologie, maintenant repoussées en L2 ou L3 sont aussi FUG (Bridoux 2011). En classe de troisième compte tenu des nouveaux programmes du collège, la notion de fonction numérique semble présenter des aspects FUG (Robert, travail en cours).

Robert (1998) a aussi relevé une distribution différente, entre lycée et université, au niveau des types de tâches proposées aux étudiants et au niveau des mises en fonctionnement des connaissances attendues : au lycée, les tâches mettent souvent en jeu des connaissances qui sont explicitées et qui doivent être appliquées de façon relativement immédiates. A l'Université, les tâches mettent plus souvent en jeu des connaissances à reconnaître (supposées disponibles) et aussi à adapter (changements de points de vue sur les tâches, mélanger les connaissances visées avec d'autres connaissances, introduire des objets intermédiaires, des étapes de raisonnement …). A l'université, de ce fait, les connaissances doivent être plus disponibles (mobilisables sans indication) et mises en fonctionnement de façon plus complexe, avec une augmentation des exigences en termes de raisonnements, preuves, formalisations et langage. Par ailleurs, le caractère outil (Douady 1986) de certaines connaissances est valorisé dans le secondaire alors que c'est plutôt le caractère objet qui l'est à l'université et vice versa pour d'autres connaissances. A ce niveau didactique, Bloch (2005) a clarifié la complexité par l'introduction de 9 « variables didactiques » dont les valeurs différentes contribuent à « mesurer » les différences entre lycée et université.

On note enfin une différence entre secondaire et supérieur au niveau des déroulements (Grenier-Boley 2009). Par exemple, il y a une accélération du temps didactique, avec un renouvellement rapide des objets mathématiques enseignés qui oblige à des assimilations plus rapides. Il y a également un nouvel équilibre entre exercices à portée générale et exercices plus particuliers, un éventail des types d'exercices plus large qui rend la routinisation beaucoup plus difficile qu'au lycée, cette dernière étant déléguée aux étudiants en travail personnel, qui se doivent de ce fait d'être plus autonomes face à leurs apprentissages (aussi dans Praslon 2000).

1.b La notion complexe de fonction et sa conceptualisation

La notion de fonction peut intervenir dans de nombreux cadres, comme outil ou comme objet (Douady 1986) et elle se trouve connectée à deux autres notions essentielles du champ de l'Analyse : les nombres réels (en particulier les nombres réels comme limites) et les suites numériques. Ceci nécessite de prendre en compte le vaste champ conceptuel des l'Analyse (Vergnaud 1991) et non la notion isolée pour questionner la conceptualisation de la notion de fonction. Les domaines de travail que nous définirons plus bas ne seront caractérisés que par rapport à la notion de fonction mais ils devront être entendus pour tout ce champ conceptuel. C'est une limite du travail à prendre en compte. Nous la discutons dans nos perspectives (dernier chapitre de la note de synthèse) en développant le lien possible entre nos recherches et les espaces de travail en Analyse (Kuzniak 2010).

Le travail sur et avec les fonctions fait également intervenir plusieurs systèmes de représentations dans plusieurs registres différents (Duval 1991), ce qui fait l'une de ses spécificités essentielles : les représentations en tableau de valeurs (registre numérique), les représentations en courbes (registre graphique), les représentations par des formules (registre algébrique), les représentations en tableaux de variations (registre schématique) et les représentations formelles (registre symbolique). Selon Duval, la conceptualisation de la notion passe par trois stades de mises en fonctionnement des représentations : la formation des représentations, le traitement des représentations à l'intérieur d'un registre et la conversion entre représentations de registres différents.

Les fonctions sont donc des objets complexes, encore en apprentissage lorsque les étudiants entrent à l'université. Nous postulons que la conceptualisation de la notion de fonction numérique est liée à la rencontre et à la mise en fonctionnement de la notion dans plusieurs cadres, comme outil ou comme objet (Douady 1986), proposées dans un ordre approprié, dans des registres multiples (avec des activités de formation, de traitement, de conversion des représentations au sens de Duval 1991) et à travers des tâches variées, à l'origine de diverses adaptations de connaissances (Robert, 1998), y compris de nombreuses applications immédiates le cas échéant (les « gammes »).

En outre, les études de fonctions font également appel à plusieurs aspects de la notion de fonction. En effet, certaines propriétés sont ponctuelles en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la valeur de la fonction au point x_0. Par exemple, énoncer $f(x_0)=3$ est une propriété ponctuelle qui ne donne rien sur $f(x_1)$ lorsque $x_1 \neq x_0$. Certaines propriétés sont globales, c'est-à-dire qu'elles sont des propriétés valables sur des intervalles : parité, périodicité, croissance, continuité et dérivabilité globales… Enfin, certaines propriétés d'une fonction f sont locales en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles dépendent des valeurs de f sur un voisinage de x_0 aussi petit soit-il : avoir une limite en x_0, être continue en x_0, être dérivable en x_0, être négligeable devant une autre fonction au voisinage de x_0, avoir un développement limité en x_0… Dans certains cas, x_0 peut aussi être infini mais ce cas est pour nous particulier ; par exemple les propriétés locales de continuité et dérivabilité n'y sont pas définies. Nous y reviendrons.

Nous pointons dans nos travaux l'importance pour la conceptualisation de la notion de fonction de ses mises en fonctionnement sous les trois perspectives ponctuelle, globale ou locale. Autrement dit, comme en fait l'hypothèse Rogalski M. (2008), un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives, ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction (voir aussi Bloch 2003, Maschietto 2001, 2008, Chorlay 2011).

1.c Différentes approches complémentaires sur les conceptions et sur la conceptualisation des fonctions

Les conceptions des élèves et des étudiants ont bien sûr déjà été étudiées à travers plusieurs théories didactiques que nous souhaitons mentionner ici : Tall et Vinner (1981) introduisent la distinction entre concept image et concept définition, le premier ne concordant pas généralement avec le concept définition, spécialement dans le cas des fonctions (Vinner 1983). Balacheff et Gaudin (2002) identifient deux types de conceptions chez des élèves à la fin du lycée : une conception « courbe – algébrique » et une conception « algébrique – graphique ». Les élèves possédant la première conception voient prioritairement les fonctions comme des cas particuliers de courbes, celles pour lesquelles une expression algébrique peut être attachée. Les autres considèrent que les fonctions sont d'abord des expressions algébriques, le graphique venant ensuite. Focalisant aussi sur les représentations graphiques et algébriques des fonctions, Duval (1993) explique que « *la lecture des représentations graphiques suppose la perception des variations correspondantes à l'écriture algébrique. Cette lecture est une démarche d'interprétation globale qui suppose une attitude contraire à la pratique épellative associant un point à un couple de nombres* ». Il montre que les élèves ont des difficultés en cette interprétation globale du graphe. Elia et al. (2008) mènent une étude multidimensionnelle et mettent en évidence par des analyses statistiques implicatives des corrélations possibles dans les réponses des étudiants entre quatre dimensions : la définition donnée de fonction, les exemples donnés, l'aptitude à reconnaître et à convertir des représentations et enfin l'aptitude à résoudre des problèmes sur les fonctions. Monoyiou et Gagatsis (2010) proposent quant à eux un questionnaire portant sur les fonctions et leurs représentations à des enseignants en formation initiale à Chypre et en Italie. Malgré les différences existant au niveau des programmes, des manuels scolaires et des pratiques enseignantes entre les deux pays, leurs analyses statistiques révèlent deux classes distinctes de variables, la première correspondant à une approche algébrique des fonctions et la deuxième correspondant à ce qu'ils appellent une approche coordonnée des représentations algébriques et graphiques des fonctions. Enfin, Gagatsis et al. (2010) retrouvent ces résultats auprès d'élèves âgés de 16 à 17 ans en lien avec l'enseignement reçu. Plus précisément, ils notent que des étudiants ayant un enseignement scientifique des fonctions dépassant les démarches intuitives et les traitements algébriques persistent toujours dans une approche très algébrique des fonctions.

D'autres approches portent sur la conceptualisation elle-même de la notion de fonction. Une première est basée sur la dualité processus-objet de la théorie APOS (Dubinsky 1991) : la conceptualisation de la notion de fonction débute par des actions sur des objets physiques ou mentaux déjà construits. Ces actions s'intériorisent alors en processus qui sont ensuite encapsulés en nouveaux objets mathématiques puis manipulés dans des schémas. Cette approche a été complétée par la triade Intra-Inter-Trans (Piaget et Garcia 1989) qui enrichit le stade « Schéma » de Dubinsky : au niveau intra, l'élève ou l'étudiant considère les fonctions comme des objets isolés et se concentre sur les processus dans lesquels ils sont engagés. Au niveau inter, il commence à faire des connexions entre objets fonctionnels de même nature, à donner sens à l'idée de transformation engageant ces fonctions. Au niveau Trans enfin, il peut considérer des systèmes de transformations et les structures qui en émergent.

Sfard (1991) propose, à la même époque, que les concepts mathématiques tels que les fonctions peuvent être conceptualisés sous deux formes : d'abord opérationnelle, en tant que processus, puis structurelle, en tant qu'objets, les deux conceptions étant toujours successives dans sa théorie de la réification. Suivant Bachelard (1938), Sierpinska (1992) utilise la notion d'obstacle épistémologique pour étudier certaines propriétés des fonctions et notamment la notion de limite. Réfutant ensuite l'idée de succession des conceptions sous tendue par la théorie APOS et la théorie de la réification, Tall (1996) introduit la notion de procept, amalgame entre deux composants : un processus qui donne naissance à un objet mathématique et un symbole qui représente de façon duale à la fois le processus et l'objet[3].

Finalement, Tall (2006) modélise l'évolution cognitive dans la « pensée fonctionnelle » en caractérisant trois mondes mathématiques : un monde « incorporé conceptuel » fait d'expériences sensorimotrices de la quantité et de la covariation, un monde « symbolique proceptuel » où les représentations permettent les manipulations aux niveaux processus et objets des fonctions puis un monde « formel axiomatique » où les objets sont assujettis à des définitions et les propriétés déduites via des preuves formelles.

La transition lycée-université peut donc être interprétée en un passage du monde « symbolique proceptuel » de Tall, caractéristique des pratiques à la fin du lycée, au monde « axiomatique formel », ainsi qu'en une élévation dans la triade de Piaget et Garcia : des niveaux Intra et Inter vers les niveaux Inter et Trans. En effet, le travail sur les fonctions est caractérisé dès le début de l'université par un élargissement vers le langage ensembliste avec les nouvelles notions qui lui sont attachées (injectivité, image réciproque…). Cet élargissement s'accompagne d'une introduction de nouveaux types de fonctions (fonctions caractéristiques d'ensembles, fonctions de deux variables…), une généricité plus grande (multiplicité des paramètres, familles de fonctions…), un rapport aux procepts différents (rôle accru de la représentation symbolique, rôle minoré de la représentation algébrique, nouveau rôle d'outil de la représentation graphique pour supporter les preuves et les formalisations par exemple…) sans oublier

---

[3] John Monaghan qui a travaillé avec David Tall à cette époque sur cette dualité entre processus et objet avait proposé la terminologie de « projet », ce qui ne pouvait convenir, d'où l'émergence de la notion de procept, amalgame entre processus et concept. Mais l'idée initiale est bien la dualité entre le processus et l'objet.

l'utilisation plus importante des aspects locaux des fonctions et de la perspective correspondante qu'ils amènent à adopter de la part des étudiants.

1.d Discussion sur les registres de représentations et les perspectives

Bloch (2003) exploite l'idée que les différentes représentations sont réductrices ou productrices par rapport aux aspects ponctuels ou globaux des fonctions et donc font travailler différemment les perspectives sur les fonctions. En effet, la représentation numérique, et notamment le tableau de valeurs, ne fait travailler que la perspective ponctuelle sur les fonctions.

Au contraire, la représentation en tableau de variation fait travailler la perspective globale. Coppé et al. (2007) ont montré à ce propos que des élèves de seconde ont plus de difficultés à utiliser le registre des tableaux de variations que le registre numérique des tableaux de valeurs. En même temps, la conversion d'un tableau de variation à un autre système de représentation (algébrique, graphique et même numérique) semble être plus difficile que la conversion à partir d'une table de valeur. Ils pointent ainsi que la complexité du tableau de variation est certainement sous estimée dans l'enseignement. Il y a donc des difficultés inhérentes à l'adoption de la perspective globale sur les fonctions à partir des tableaux de variations en classe de seconde.

Les représentations graphiques permettent à la fois les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions : en effet le graphe d'une fonction peut être tracé point par point et l'adoption de la perspective ponctuelle sur le graphe permet de manipuler les propriétés ponctuelles classiques sur les images et les antécédents. Mais le graphe peut également être considéré globalement et il traduit alors pour les fonctions simples les propriétés globales : croissance, parité, périodicité, majoration...

Au contraire, la représentation algébrique (la formule) ne peut pas soutenir aisément la perspective globale sur les fonctions. Rogalski (1984) explique par exemple que « *les caractères producteurs dominants* – de la représentation graphique - *sont essentiellement le fait que la représentation graphique fait apparaître une fonction comme unité, ce qui la différencie de l'algorithme de calcul représenté par la formule ou aux données discontinues et partielles de la table de valeur* ». Dans la même idée, selon Raftopoulos et Portides (2010), les formules ne peuvent être interprétées globalement que par les experts. La fonction $x \to x^2$ ou la fonction $x \to \sqrt{x}$ peuvent être interprétées globalement par des élèves car ils ont le graphe en tête (disponibilité du graphe) mais c'est plus difficile pour eux dès que les expressions algébriques deviennent plus complexes. Dire que $x \to x^2 + \sqrt{x} + \exp(x)$ est croissante sur R^+ car somme de trois fonctions croissantes suppose l'adoption de la perspective globale à partir de la formule, ce qui demande une certaine expertise. Les élèves de première ou terminale vont bien souvent calculer une dérivée de la fonction sur $[0, +\infty[$. En général, les propriétés globales ne sont pas visibles directement à partir de la formule mais elles doivent être déduites à partir de traitements algébriques. Comme cas extrême, citons l'exemple de

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}-1} - 1 - \frac{x}{2}$$

qui est une fonction paire. Cependant, même en adoptant une perspective globale sur la formule, il est impossible de s'en rendre compte. C'est un développement en série entière qui permet de le réaliser ou bien une recherche directe de parité par le calcul de $f(-x)$.

Pour le non expert, la formule ne permet donc pas en général de déduire des aspects globaux de la fonction. Elle ne permet pas la construction directe du tableau de variation. Elle permet la construction de la courbe, mais point par point, ce qui ne fait pas travailler la perspective globale sur la fonction en jeu. C'est seulement la réinterprétation d'un tableau de variation ou d'un graphe déjà construit qui peut faire adopter une perspective globale sur la fonction pour des élèves.

Remarquons que le traitement de ces propriétés globales peut plus ou moins faire travailler la perspective globale : certaines propriétés globales sont en effet des propriétés ponctuelles universelles, c'est-à-dire des propriétés ponctuelles vérifiées pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle de définition – par exemple : f est paire si et seulement si son intervalle de définition est symétrique et pour tout x de cet intervalle, on a $f(x)=f(-x)$; f est t périodique si et seulement si pour tout x de son intervalle de définition, on a $f(x)=f(x+t)$. L'établissement de ces propriétés est donc facilement accessible par un traitement mettant en jeu une seule variable x. L'absence de perspective globale peut ne pas être handicapante sauf s'il faut réinterpréter globalement des propriétés ponctuelles universelles (par exemple pour tout x, $f(x)=f(x+t)$ donc f est t périodique). Au contraire, d'autres propriétés, comme la croissance, sont liées à la variation, et sans une hypothèse de dérivabilité des fonctions, elles ne peuvent pas se traduire par une propriété ponctuelle universelle. Elles nécessitent la prise en compte de deux valences de la variable sur l'intervalle de définition de la fonction : f est croissante si et seulement si pour tout x et y tels que $x \leq y$ on a $f(x) \leq f(y)$. La perspective globale et la quantification deviennent fondamentales dans l'activité. En particulier, un traitement de la croissance sous cette forme fait sans nul doute mieux travailler la perspective globale qu'un traitement par la positivité de la dérivée. Nous y reviendrons.

En ce qui concerne la perspective locale, remarquons tout d'abord que les propriétés locales en un point x_0 ne sont rien d'autres que des propriétés globales vérifiées sur tout voisinage de x_0. Nous émettons l'hypothèse qu'adopter une perspective locale sur le graphe suppose donc de dépasser la perspective uniquement ponctuelle. En effet, dans une recherche ancienne sur l'acquisition de la notion locale de limite de suites, Robert (1982) met en évidence la corrélation entre une conception statique, bidimensionnelle, de la notion locale de limite et l'acquisition de la définition en termes formels. Aussi, la perspective ponctuelle sur les fonctions ne semble pas permettre une conception statique et bidimensionnelle de la notion de limite mais plutôt une conception dynamique, qui fait obstacle à l'acquisition de la définition. Cette perspective ponctuelle peut rentrer en conflit avec la perspective locale. Par exemple, les représentations de la droite numérique (et donc des fonctions) associées à la perspective ponctuelle sont des représentations discrètes alors que les représentations nécessaires pour adopter la perspective locale sont des représentations continues, qui ne sont disponibles qu'avec une perspective globale sur la droite ou la fonction. En d'autres termes, la perspective locale sur les fonctions ne pourrait s'adopter sans la disponibilité préalable d'une perspective globale et savoir adopter la perspective globale serait une condition nécessaire pour conceptualiser la notion fondamentale de limite.

En outre, Robert et Boschet (1984) pointent l'importance pour les étudiants de disposer de connaissances disponibles dans plusieurs cadres et registres (hypothèse des blocs) et non seulement dans un seul (qu'il soit algébrique, graphique ou symbolique notamment). D'après ces résultats et conformément aux arguments développés plus haut, adopter la perspective globale sur les fonctions ne pourrait se faire sans une maitrise par les étudiants de représentations mettant l'accent sur les propriétés globales des fonctions, d'où la nécessité de connaissances graphiques et symboliques. Les représentations algébriques, seules, peuvent ne pas suffire pour adopter la perspective globale, en particulier lorsque des propriétés comme la croissance ne sont pas suffisamment travaillées avec leur définition originale relevant de la perspective globale.

2. Domaines de travail pour l'étude des fonctions

Dans l'enseignement, la notion de fonction apparaît dans la scolarité française à la fin du collège et s'enrichit jusqu'à l'université. Les premiers travaux que nous avons menés avec la CI2U[4] (Vandebrouck 2008a), à partir de l'étude des programmes, des manuels scolaires, d'épreuves de baccalauréat et de feuilles d'exercices de la première année d'université ont amené l'idée que le travail sur les fonctions est maintenant divisé en trois grand domaines, bien distincts, non hiérarchisés et assez étanches. Ces trois domaines de travail décrivent donc la réalité actuelle de l'enseignement de la notion de fonction. Nous utilisons la définition que fait Robert (2003) de « domaines de travail » en géométrie : un ensemble auto consistant, cohérent, enseigné ou enseignable, spécifié par des fondements, un corps de définitions, des modes de raisonnements, un niveau de rigueur et enfin un corps de problèmes résolubles en son sein. Un domaine de travail fait partie d'un champ conceptuel, plus vaste.

[4] Commission Inter Irem Université

Dans le paragraphe 2a, nous décrivons rapidement les évolutions de la notion de fonction à travers les programmes de lycée, depuis les années 80. Les trois paragraphes suivants correspondent à la description des trois domaines de travail.

2.a Évolution des programmes d'enseignements de 1981 à 2002

La notion de fonction apparaît dans les programmes dès le collège, à partir de l'étude des situations de proportionnalité et en lien avec les fonctions linéaires et affines. Nous ne parlons dans la suite que des programmes de lycée, à partir de la classe de seconde et nous nous tournons vers ce qui touche à la démarche d'Analyse et à la perspective locale.

Nous situons notre point de départ de cette étude des programmes en 1981 où Lazet et Ovaert publient un article intitulé « *pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'Analyse* ». Suite à la réforme des mathématiques modernes, ils dénoncent l'introduction des notions de base de l'Analyse sans problématique sous jacente ou avec une problématique très élaborée mathématiquement mais loin de l'élève. Ils dénoncent l'emploi trop précoce du langage formalisé souvent hermétique aux élèves, un enseignement trop centré sur le discours du maitre, une construction linéaire des concepts, non rapportée à la résolution de problèmes, une prédominance trop grande du qualitatif sur le quantitatif, un intérêt trop précoce pour le pathologique (Artigue 1993).

Ils proposent de modifier les rapports entre théorie et applications, de promouvoir une approche plus constructiviste des apprentissages, de rééquilibrer le quantitatif et le qualitatif et enfin de ne théoriser que le seul nécessaire, en s'appuyant sur des niveaux de formalisation accessibles aux élèves. Dans leur texte, il apparaît à plusieurs reprises les fonctions ou suites de références comme objets privilégiés pour entrer dans la démarche d'Analyse. Les techniques de majorations, minorations, encadrements avec des suites et des fonctions de références sont mises en valeurs comme techniques fondamentales de l'Analyse. Les suites et fonctions de références apparaissent donc à deux niveaux, le premier comme objets simples et typiques permettant d'aborder qualitativement les propriétés des fonctions et le second comme outils permettant d'aborder quantitativement les propriétés (globales et locales notamment) de classes plus larges de fonctions.

Dans la réforme de 1982, les prescriptions de Lazet et Ovaert sont assez suivies. Le champ de l'approximation est en jeu dès la classe de seconde, avant même un quelconque enseignement de l'Analyse. Il y a une importance accordée à l'exploration (graphique et numérique) à l'aide des calculatrices et à l'étude globale et locale de fonctions simples (fonctions de références) en préalable à l'introduction de définitions générales. C'est ainsi que pour la progression vers la définition de la limite en 0 d'une fonction en première scientifique, les enseignants commencent par des exemples de fonctions vérifiant $|f(x)|<M|x|$ au

voisinage de 0 et la vérification que ce type de $|f(x)|$ peut-être rendu aussi petit que voulu, en imposant à $|x|$ d'être dans un intervalle suffisamment petit centré en 0. Les enseignants continuent par un examen de situations qui échappent à ce cadre et incitent à un point de vue plus qualitatif ($\sqrt{|x|}$ par exemple). La stratégie préconisée est analogue pour la dérivation. Il y a également une limitation bienvenue de la formalisation. Seule la limite en 0 est formalisée en epsilon et eta.

Il s'en suit un période où les fonctions de références envahissent les programmes de seconde. Leur étude globale est traitée et l'étude de leurs aspects locaux se limite à des observations en classe de première. Plus précisément, les limites en 0 sont introduites sur la base d'explorations à la calculatrice du comportement global et local des fonctions de références. Par rapport aux programmes précédents, un aspect conjectures à partir des explorations se perd, qui préparaient à des démonstrations. L'algèbre des limites disparaît en outre des programmes. Les limites sont définies de façon générale mais uniquement par des critères suffisants à partir des fonctions de références. Le recours à l'approximation est donc imposé. Les majorations, minorations, encadrements (et le théorème des gendarmes) deviennent des outils essentiels de l'activité des élèves. Mêmes si les techniques sont parfois très lourdes, les enseignants reconnaissent un gain au niveau des majorations, minorations, encadrements, au niveau du contrôle de la variable indépendante, au niveau du choix de fonctions de références pour mettre en évidence une limite, au niveau de l'approximation, du maniement de la valeur absolue ou encore du repérage de terme algébriques prépondérants dans une expression.

La réforme de 1990 voit le repli des fonctions de références dans les programmes de lycée. Mais il n'y a plus de définitions (ou même pseudo définitions à partir des fonctions de références) des notions de convergence et de limite dans les programmes. Il reste un appui sur des explorations numériques et graphiques pour l'introduction des limites, mais pas seulement sur les fonctions de références, qui perdent ainsi progressivement leur statut. Dès la classe de première, les rudiments de l'algèbre des limites sont réintroduits et donc la majoration, minoration par des fonctions de références n'est plus le passage obligé pour l'étude des limites. Les règles algébriques sont essentiellement admises et leur signification est mise en valeur intuitivement. Enfin, les programmes de 2002 se mettent en place et ils entraînent les trois domaines de travail que nous introduisons maintenant.

2.b Un premier domaine de travail F1 d'entrée dans la pensée fonctionnelle

Ce domaine de travail couvre la fin de collège jusqu'au début de la classe de première S. Dans ce domaine F1, les représentations des fonctions (notamment les tableaux de variations, les graphiques et les formules algébriques) sont introduites, donnant corps à un nouveau cadre de travail pour les élèves, appelé cadre fonctionnel. Le chapitre central de la classe de seconde est le chapitre « généralités sur les fonctions ». A partir d'une introduction ensembliste de la notion de fonction, l'enjeu d'apprentissage semble être que les élèves entrent dans la « pensée fonctionnelle », c'est-à-dire qu'ils conceptualisent les fonctions en tant qu'objet, qu'ils puissent adopter la perspective globale sur cet objet, en coordonnant les multiples registres de représentations et en reliant le cadre fonctionnel à de nombreux autres cadres (géométrique ou physique notamment). Robert (2011) parle de « relief des notions à enseigner » pour présenter les caractères spécifiques des notions, qui peuvent orienter l'enseignement.

Les notions de parité, de périodicité ou de croissance, dont nous avons déjà parlé, sont des propriétés globales des fonctions qui sont spécifiquement travaillées en seconde au sein de ce domaine. Les notions de maximum, minimum (globaux) sont également travaillées, toujours sous différents registres de représentations. Les variations globales de fonctions polynômes de degré 2, de l'inverse, et dans une moindre mesure de fonctions homographiques, sont étudiées mais ces fonctions perdent leur statut de fonctions de références. Des inéquations sont résolues, à la fois algébriquement et graphiquement. Toutes ces activités doivent concourir à l'objectif énoncé plus haut, en particulier l'articulation entre perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions. Dans la terminologie de Tall et Garcia, l'élève doit accéder au monde « symbolique - proceptuel » où les représentations permettent les manipulations aux niveaux processus et objets des fonctions mais aussi accéder au niveau Inter de Garcia : il doit commencer à faire des connexions entre des objets fonctionnels de même nature et à donner sens à l'idée de transformation engageant ces fonctions. Le gain d'un tel effort doit se faire sentir par des tâches de comparaisons de fonctions ou par les propriétés à mettre en jeu dès lors qu'est utilisée une classification des fonctions : linéaires, affines, du 2^{nd} degré, polynomiales….

Cependant, comme dit Comin (2005) : « *l'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles, modélisée par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs (…) nous faisons l'hypothèse que les pratiques qui sont proposées aux élèves portent sur un nombre fini de valeurs et éloignent les élèves de l'idée de variabilité et de continuité* ». Autrement dit, l'approche retenue dans les programmes pour la définition de fonction éloigne de la perspective globale sur les fonctions, peut enfermer les élèves dans la perspective ponctuelle, voire ne pas leur permettre d'accéder au niveau de conceptualisation objet. Les utilisations de tableaux de valeurs, les tâches de recherches d'image et d'antécédent ou les tâches de recherches de solutions à des équations seraient par exemple surreprésentées au sein du domaine de travail F1. En outre, l'herbier de fonctions disponibles dans ce domaine F1 se limite à des fonctions affines, des fonctions polynomiales de degré 2, la fonction inverse et parfois quelques fonctions homographiques. Ces fonctions perdent enfin leur statut de fonctions de référence pour introduire les notions locales comme dans les programmes précédents.

Bloch (2003) met en évidence le fait que les élèves n'exploitent que rarement, à l'issue de ce domaine de travail F1, la puissance du graphique au niveau global. Elle fait des propositions pour des séquences d'enseignement en seconde, supportées par la perspective globale du registre graphique. Elle pointe déjà le travail au niveau local qui pourrait être engagé dans ce domaine F1. Dans son travail, Maschietto (2001) met aussi en évidence l'importance que pourraient avoir les représentations graphiques comme outils pour entrer dans des tâches d'Analyse locale dès la première S.

2.c Un deuxième domaine de travail F2 très algébrisé

Dès la classe de seconde (mais surtout à partir de la première S) et jusqu'à l'université où il est complexifié, il s'ouvre un domaine F2 très algébrisé, théoriquement formalisateur et simplificateur du domaine F1. Par exemple, comme le notent Coppé et al. (2007), le registre algébrique déjà important pour l'étude des fonctions dans les manuels de seconde (de 30% à 58% des exercices selon un manuel de seconde) devient prédominant dans les manuels de première et de terminale scientifique. Notre hypothèse est que le cadre fonctionnel se réduit alors au cadre algébrique où tout le « relief » que l'enseignement a donné à la notion de fonction dans le domaine F1 est masqué : en particulier les deux perspectives ponctuelle et globale sur les objets fonctions, qui ne sont pas suffisamment repérées par les élèves à l'issue de F1, ne sont plus mises en valeur dans le domaine F2, étant donné l'insuffisance de la représentation algébrique vis-à-vis de ces perspectives. Autrement dit, les élèves ne sont pas assez experts au sortir de la classe de seconde pour interpréter toutes les représentations algébriques rencontrées comme des fonctions sous leur perspective globale.

Cependant, dans ce domaine F2, les notions locales sont progressivement introduites : limite, continuité, dérivabilité, la dernière étant d'ailleurs introduite dans les programmes de première scientifique avant la notion de limite. De nombreux travaux (Schneider 1991, Castela 1995, Vivier 2010) ont ici mis en évidence la difficulté pour les élèves à adopter la perspective locale à partir du jeu de cadre géométrique / numérique symbolique (Schneider 1991) qui est proposé dans l'enseignement. Cette introduction est basée sur l'idée de tangente comme limite des sécantes mais les élèves ne peuvent avoir qu'une perspective globale sur la tangente, vue au collège et en seconde comme droite qui intercepte la courbe (le cercle ou la parabole essentiellement) en un unique point double. Le changement de perspective, important au moment de l'introduction de ce nombre dérivé, ne peut donc pas être suffisamment repéré par les élèves. Cette perspective locale est ensuite très peu travaillée pour elle-même en première et en terminale. Maschietto (2001, 2008) a par exemple travaillé avec les technologies le jeu global/local au moment de l'introduction du nombre dérivé. Elle utilisait la fonctionnalité de zooms des calculatrices graphiques mais il s'agissait d'un travail d'ingénierie qui n'est pas usuel dans les pratiques enseignantes. Les notions locales sont en fait principalement mobilisées dans des exercices où les fonctions sont représentées et représentables par une formule algébrique, en général polynomiale puis mêlant exponentielles et logarithmes en terminale. Les recherches de limites sont traitées par des calculs algébriques et les démarches de minorations, majorations et encadrement avec des fonctions de références, qui avaient été introduites dans les programmes à partir de 1982 et qui pouvaient donner corps à la perspective locale, ont quasiment disparu. Il n'y a plus de définition opérationnelle du concept de limite et une approche intuitive de la notion de limite apparaît. Les représentations graphiques permettent seulement d'illustrer les notions et quelques résultats locaux dont les preuves ne sont pas assumées. Selon Bloch (2002), « *cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique / fonctions supposé transparent : les élèves sont supposés voir dans le dessin graphique ce qu'y voit le professeur* ». Compte tenu des considérations faites plus haut sur la difficulté d'accès à la perspective globale sur les fonctions, cette perspective locale ne peut effectivement pas aller de soi pour les élèves.

Au niveau du baccalauréat, Coppé et al. (2007) notent qu'il existe toujours une forte algébrisation de techniques pour l'étude des fonctions, basées sur des règles de calcul algébriques (calculs de limites, de dérivées, étude des variations de fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes…), qui renforcent les élèves dans des pratiques algébriques. Les questions portent sur des études globales mais sont algébrisées. En particulier, les fonctions sont toujours dérivables globalement et la variation est étudiée à partir du signe de la dérivée, ce qui ramène des propriétés globales à des propriétés ponctuelles universelles et masque le caractère global de ces propriétés. Les tableaux de variations et les graphiques dont l'usage permettrait de travailler la perspective globale, ne sont que rarement des outils de travail mais sont essentiellement des objets à construire, à compléter, à confronter aux résultats algébriques. Le théorème et l'inégalité des accroissements finis, qui étaient des outils permettant des encadrements et des majorations globales, critiqués parce que stéréotypant les sujets de baccalauréat, ont disparu des programmes, participant à ce recul du travail des perspectives globale et locale sur les fonctions. Les questions ponctuelles (résolutions d'équations ou intersections de graphes) sont traitées algébriquement et le graphique ne sert encore qu'à conforter les résultats algébriques, ce qui réduit son rôle à un rôle de contrôle. Les problèmes locaux (limites, continuité, dérivabilité en un point) sont encapsulés dans des procédures algébriques. Le taux de variation d'une fonction peut-être explicitement demandé à des élèves de terminale mais l'idée de son calcul n'est pas supposée disponible spontanément quand elle est judicieuse.

Au final, Bloch, Comin, Coppé et al pointent comme nous, le fait qu'avec le travail algébrique dans le domaine F2, de façon assez isolée du travail dans le domaine F1, l'enseignement secondaire contribue à masquer les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions et il évacue aussi la perspective locale dans ses programmes, ses manuels et ses pratiques. Autrement dit, il y aurait, avec le travail en F2, une large algébrisation, qui nuirait d'une part à l'accès des élèves à la perspective locale et qui masquerait d'autre part les perspectives ponctuelle et globale à adopter sur les fonctions. Des élèves, qui se retrouveraient majoritairement dans les populations étudiantes à l'université, ne pourraient pas facilement passer du ponctuel au global et vice versa. Hors des situations algébrisées, les fonctions seraient considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Dans les situations algébrisées, les objets manipulés seraient très formels, sans les différentes perspectives sous jacentes.

2.d Un troisième domaine de travail F3 tourné vers l'Analyse

Le troisième domaine de travail F3 s'engage cependant dès le début de l'université. C'est le domaine de l'Analyse non algébrisée avec toutes ses règles, et notamment les règles de quantifications qui deviennent ici impératives. Comme nous l'avons vu plus haut, la démarche d'Analyse est une démarche différente de la démarche algébrique. Les techniques qui sont attachées à l'Analyse relèvent de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires et relèvent pour beaucoup de la perspective locale sur les fonctions. Son fonctionnement ne doit pas pour autant sacrifier les démarches algébriques simplificatrices et notamment l'algèbre des limites qui reste toujours présent dans ce domaine. Cependant des expressions proposées dans les programmes d'enseignement, comme « proche de » ou « de plus en plus proche », ne peuvent pas être opérationnelles dans le cadre algébrique et sans recours aux quantificateurs. Les fondements du domaine de travail F3 sont ceux de la complétude de R, généralement admise sous l'une des trois formes suivante : la convergence des suites croissantes majorées, la convergence des suites adjacentes ou la convergence des suites de Cauchy. Le premier théorème d'Analyse locale, concernant l'image d'une suite convergente par une fonction continue, est démontré. Sa démonstration nécessite le recours à la quantification et aux définitions précises des notions de convergence et de continuité comme dans le développement ci-dessous trouvé sur Université en Ligne (UeL) :

Preuve.

- Condition nécessaire
  Soit $\varepsilon>0$;
  de la continuité de f en x_0 on déduit :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I \left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right);$$

de l'égalité $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ on déduit :

$$\exists N \in \mathrm{N}, \forall n \in \mathrm{N} \ (n \geq N \Rightarrow u_n \in I \text{ et } |u_n - x_0| < \eta);$$

d'où :

$$\exists N \in \mathrm{N}, \forall n \in \mathrm{N} (n \geq N \Rightarrow \ |f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

(On remarque la grande analogie avec la démonstration concernant la limite d'une fonction composée, ceci vient du fait qu'une suite est une application de **N** dans **R**).

- Condition suffisante
  Première étape :
  On montre que toutes les suites images des suites, qui ont pour limite x_0, ont pour limite $f(x_0)$.
  Soit (u_n) une suite dont la limite est x_0, la suite $(f(u_n))$ est convergente, on note ℓ sa limite; on considère également la suite (v_n) constante et égale à x_0, $(f(v_n))$ a pour limite $f(x_0)$.
  On définit une suite (w_n) par :

$$w_{2n} = u_n \text{ et } w_{2n+1} = v_n.$$

La suite (w_n) a pour limite x_0, donc $(f(w_n))$ est convergente et les suites extraites $(f(w_{2n}))$ et $(f(w_{2n+1}))$ ont donc même limite, on a donc $\ell = f(x_0)$.

Deuxième étape :
méthode : par la contraposée
On suppose f non continue en x_0, c'est à dire que l'on a :

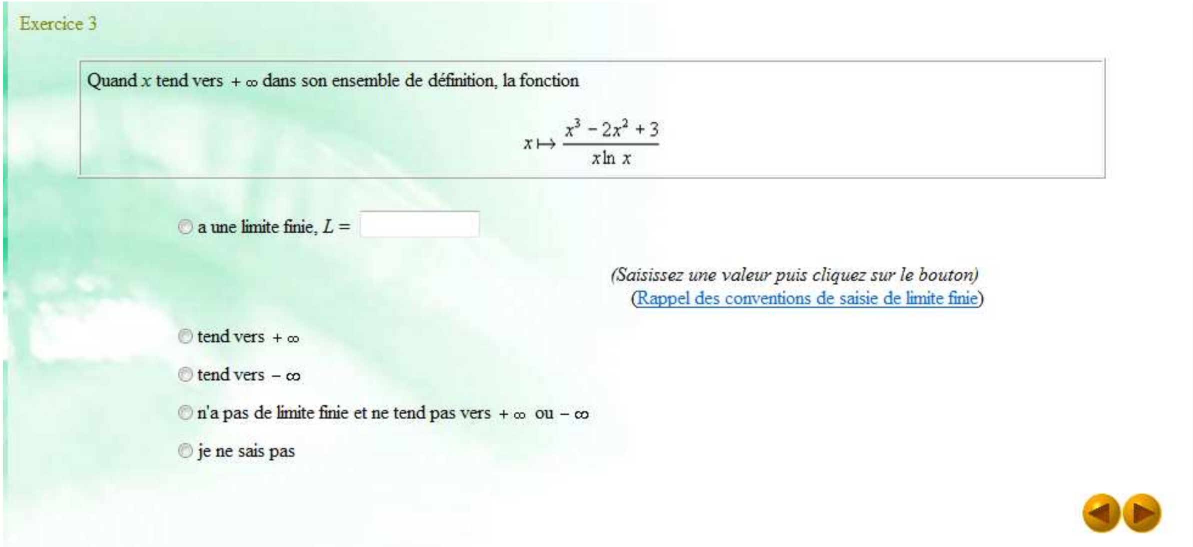
$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \eta > 0, \ \exists x \in I (|x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

On considère une suite (η_n) qui tend vers 0, par exemple la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$; pour tout entier n supérieur ou égal à 1 il existe u_n tel que

$$|u_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

On a mis en évidence l'existence d'une suite admettant x_0 pour limite et telle que la suite image ne converge pas vers $f(x_0)$.

Le travail dans ce domaine F3 nécessite aussi constamment un jeu entre les deux perspectives globale et locale : le calcul algébrique de la limite d'une expression complexe nécessite par exemple une mise en perspective locale pour repérer les termes prépondérants et les termes négligeables de l'expression manipulée, comme dans l'exemple ci-dessous tiré de l'Université en Ligne (UeL) :



Ensuite vient le travail sur les fonctions négligeables, les fonctions équivalentes, les développements limités et les formules de Taylor qui ont soit un caractère global (formule de Taylor Lagrange ou formule de Taylor avec reste intégrale) ou un caractère local (formule de Taylor Young).

3. Expérimentations sur les conceptions des étudiants

Notre identification des trois domaines de travail nous permet une première compréhension des difficultés observées chez les étudiants entrant à l'université. Dans ce paragraphe, nous souhaitons préciser ces difficultés à partir de productions d'élèves et d'étudiants, en reliant directement ces difficultés à la notion de perspective introduite plus haut. Dans le premier paragraphe, nous référons à une recherche exploratoire menée dans le cadre du travail de la CI2U (Vandebrouck 2008a). Dans les deux paragraphes suivants, nous référons à une recherche personnelle et orientée par notre problématique de l'adoption des perspectives par les élèves et les étudiants.

3.a Le travail de la CI2U

Dans le cadre du travail de la CI2U, un questionnaire a été proposé aux étudiants de L1 de plusieurs universités françaises (Paris Diderot, Bordeaux 1, Montpellier, Rouen) aux rentrées 2007 et 2008, pendant la première semaine de cours. 298 réponses d'étudiants ont été analysées pour ce qui concerne l'Analyse.

Comme prévu, les résultats concernant des calculs de limites étaient assez bons dès lors que ces limites mettaient en jeu des règles algébriques sur les fonctions monômes, exponentielles, logarithmes, avec des formes et des bornes usuelles : le calcul de la limite de $g(x) = x^{10}e^{x}$ lorsque x tend vers moins l'infini étant par exemple réussi à 55 %, le calcul lorsque x tend vers plus l'infini étant le mieux réussi avec 87 %. Les résultats étaient toujours corrects mais sensiblement moins bons lorsque les formes ne correspondaient pas à des formes indéterminées usuelles de terminale, c'est-à-dire que les règles algébriques ne s'appliquaient pas de façon immédiate : le calcul de la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$ lorsque x tend vers plus l'infini étant par exemple réussi à 53 %, celui le moins bien réussi étant celui de la limite de $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ lorsque x tend vers 0, réussi à seulement 9 % : l'absence de disponibilité de la perspective globale sur la fonction représentée semble pouvoir expliquer ce taux d'échec chez les étudiants. En effet, la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ tend vers $-\infty$ en 0^- et tend vers $+\infty$ en 0^+.

La perspective globale adoptée sur l'expression algébrique $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ permettrait d'appréhender cette difficulté mais comme nous l'avons expliqué plus haut seul un expert peut spontanément adopter cette perspective à partir de la seule expression algébrique. L'étudiant peut ne référer qu'aux formules algébriques et ne pense pas à la différence de traitement qui doit être faite en 0^+ et en 0^-.

En outre, les résultats de la CI2U ont remis en évidence la non disponibilité chez les étudiants de la perspective locale nécessaire pour un calcul correct des limites en formes de taux d'accroissement, la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x-2}$ lorsque x tend vers 2 n'étant réussie qu'à 13%.

Concernant des calculs de limites à l'infini qui ne mettent pas en jeu des règles algébriques, seuls 3 étudiants sur 298 ont répondu correctement aux deux calculs de limites $\mathbf{\sin(2\pi n)}$ lorsque n tend vers l'infini et $\mathbf{\cos(2\pi x)}$ lorsque x tend vers plus l'infini. Plus précisément, deux groupes d'étudiants sont alors apparus nettement. Le premier groupe est constitué des étudiants, très nombreux (126 sur 298), qui ne se dégagent pas d'une approche algébrique et ne donnent aucune réponse à ce genre de calcul de limite ($\mathbf{\sin(2\pi n)}$ lorsque n tend vers l'infini, $\mathbf{\cos(2\pi x)}$ lorsque x tend vers plus l'infini et d'autres du même type). L'autre groupe est constitué d'étudiants qui semblent pouvoir dépasser cette approche purement algébrique des fonctions et des calculs de limites : on trouve cependant parmi ceux-là d'une part des étudiants qui semblent plutôt raisonner sur les deux limites (et d'autres) avec une perspective ponctuelle, donnant une limite finie à la suite et à la fonction (54 étudiants sur les 298), et d'autre part des étudiants qui semblent plutôt adopter une perspective globale pour conclure (traitant notamment les suites comme des fonctions, 49 sur 298). Pour tous les autres étudiants, hors des deux grands groupes que nous venons d'identifier, le questionnaire était trop limité pour les catégoriser.

Comme le calcul de ces limites se fait à l'infini, il semble que ce ne soit pas la perspective locale qui soit pertinente ici mais bien la perspective ponctuelle (dans quelques cas particulier de suites comme $\mathbf{\sin(2\pi n)}$ où la perspective ponctuelle permet de trouver que la suite est constamment nulle) et surtout la perspective globale sur les fonctions en jeu (comme pour la fonction $\mathbf{\cos(2\pi x)}$

où la perspective globale permet de déduire de l'oscillation la non convergence). De fait, si la coordination des deux perspectives ponctuelle et globale se révélait nécessaire pour traiter au mieux tous les calculs de limites rencontrés, il est apparu que peu d'étudiants arrivant en L1 semblent capables de changer de perspective spontanément (une vingtaine dont les 3 qui ont répondu correctement aux limites de **sin(2πn)** et **cos(2πx)**) et que beaucoup d'étudiants ne semblent mobiliser aucune des deux perspectives, répondant faux ou ne répondant pas à toutes les questions où les procédures algébriques sont inefficaces et où ces perspectives sont pertinentes.

Signalons que dans le test de la CI2U, des résultats généraux mettaient bien en évidence la meilleure réussite au baccalauréat des étudiants semblant avoir pu raisonner à un certain moment sous la perspective globale, confortant notre hypothèse selon laquelle l'aptitude à adopter la perspective globale intervient certainement dans la réussite des étudiants en Analyse. Signalons enfin que le test de la CI2U mettait bien en évidence également les difficultés des étudiants pour manipuler les valeurs absolues et leurs énormes difficultés en ce qui concerne la logique.

3.b Un exercice à la transition lycée-université

Il a été proposé en 2010 à des élèves de terminale scientifique (S) et à des étudiants de L1 un exercice similaire, caractéristique de la transition lycée – université. Il nous a permis d'affiner notre étude des conceptions sur les fonctions en les reliant à la notion de perspective ainsi que la façon dont cette dernière intervient dans des exercices d'Analyse. Les résultats permettent de préciser les caractéristiques des deux classes d'élèves ou d'étudiants selon la capacité à mobiliser la perspective globale sur les objets manipulés (disponibilité de la perspective globale, ce qui correspondra à l'approche coordonnée proposée par Monoyiou et Gagatsis, 2010) ou bien la prégnance chez eux des seules procédures algébriques dans toutes les situations (l'approche algébrique). Ces résultats sont également cohérents avec ceux de Balacheff et Gaudin (2002), ainsi que ceux de Robert (1983) de façon plus indirecte.

Notre dispositif a consisté à étudier les productions d'élèves de terminale S et d'étudiants de L1 sur un exercice qui mélange le registre algébrique et le registre symbolique, traitant d'une fonction définie par une intégrale de la forme :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

Au lycée et à l'université, les intégrales sont introduites comme des aires sous les courbes, c'est-à-dire une approche par les intégrales définies. Le lien entre les intégrales des fonctions continues et les primitives est fait rapidement (démontré partiellement en général) de sorte que les élèves et les étudiants peuvent travailler la plupart des exercices dans le cadre algébrique.

Nous avons choisi de comparer les productions des élèves et des étudiants de L1 sur cet exercice car il est très proche de tâches classiques dans les deux institutions et les adaptations sont raisonnables, aussi bien pour les élèves que pour les étudiants. En effet, même si ce genre de fonction *G* est inhabituel dans les pratiques des élèves et des étudiants, ces derniers ont déjà rencontré des intégrales indéfinies sur des intervalles de la forme $[a, x]$ ou $[a, \beta(x)]$ (β étant une fonction linéaire) au moment du test. Les élèves devront donc adapter leurs connaissances anciennes, par exemple en introduisant un point intermédiaire *a* et en utilisant la relation de Chasles. L'intérêt d'un tel type d'étude est que des procédures relevant uniquement du domaine F2 peuvent ne pas suffire pour dégager des propriétés de la fonction *G*, mêmes ponctuelles. Il faut travailler dans le domaine F1 et recourir aux perspectives.

Le test a impliqué une classe d'élèves de terminale S d'un lycée parisien (15 étudiants) et un groupe d'étudiants de L1 (109 étudiants de l'Université Paris Diderot). Les énoncés précis ont été choisis par les professeurs de chacun des deux niveaux et de façon indépendante, avec des consignes pour traiter des questions concernant des propriétés ponctuelles et globales de la fonction *G*. Voici l'énoncé qui a été proposé en L1 :

Exercice 5

Soit *f* une fonction continue sur *R* et soit *G* la fonction définie sur *R* par

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

1) Montrer que si *f* est une fonction constante, la fonction *G* est également constante.

2) Montrer que si *f* est est paire (respectivement impaire), la fonction *G* est paire (respectivement impaire).

3) Montrer que *G* est dérivable et calculer *G*'.

4) Expliciter la fonction *G* associée à la fonction $f(t)=|t|$.

(…)

Énoncé de L1 (mars 2010)

Dans cet énoncé de L1, la fonction *f* est supposée continue globalement sur *R*. Les étudiants doivent montrer des propriétés globales sur *G*, notamment une propriété de parité de *G* (par changement de variable, connaissance spécifique de L1). Ils doivent aussi justifier que *G* est dérivable et calculer *G*'. Les questions 1) et 3) peuvent se traiter algébriquement, en introduisant une primitive *F* de *f* et sans aucune considération de perspective sur les fonctions *f* et *G*. Les difficultés des étudiants liées aux perspectives ponctuelle et globale peuvent apparaître pour les questions 2) – si *f* est paire alors *G* est paire - et 4) – expliciter *G* lorsque *f* est la fonction valeur absolue. Par exemple, en question 4), les seules procédures algébriques ne suffisent plus, bien que le registre des questions et des réponses attendues reste toujours algébrique. En effet, même en exploitant la parité de la valeur absolue et le résultat de la question 2), il est nécessaire d'envisager plusieurs cas selon que 0 appartient ou non à l'intervalle [*x*-1, *x*+1] ; c'est-à-dire *x* < -1, *x* dans [-1,1] et *x* > 1. La difficulté nous semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément la perspective ponctuelle sur *G* en *x* et la perspective globale sur *f* dans l'intervalle [*x*-1, *x*+1] pour dégager les cas de figure. La question 5) concerne quant à elle uniquement le domaine de travail F3 et nous ne développerons pas à son sujet.

Dans l'énoncé de terminale, l'introduction par l'énoncé d'une primitive *F* permet d'amblée de rester dans le domaine de travail F2 pour de nombreuses questions : 1a), 1b), 1c), 2a), 3a) 1$^{\text{ère}}$ partie et enfin 3b).

I

THÈMES : Fonction définie par une intégrale

Dans le problème, $\mathcal{D}$ désignera l'ensemble des fonctions définies, dérivables sur $\mathbb{R}$. À toute fonction f de $\mathcal{D}$, on associe la fonction $\tilde{f}$ telle que pour tout réel x : $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

1.a. Montrez que pour toute primitive F de f sur $\mathbb{R}$;
$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(F(x+1) - F(x-1)\right)$.

b. Calculez $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = t^n$, n entier, $n \geqslant 1$.
Montrez que pour toute fonction polynôme f, $\tilde{f}$ est une fonction polynôme de même degré.

c. Calculez $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = \cos \pi t$.

2.a. Montrez que pour toute fonction f de $\mathcal{D}$, $\tilde{f}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel $(\tilde{f})'(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right)$.

b. Déduisez-en que les propositions (1) et (2) suivantes sont équivalentes : (1) $\tilde{f}$ est une fonction constante ; (2) f est périodique et 2 est une période.

3.a. On suppose f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'alors $\tilde{f}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que pour tout *réel* x, $f(x-1) \leqslant \tilde{f}(x) \leqslant f(x+1)$.

b. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{4e^t}{t^2+4}$. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déduisez-en les variations de $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Énoncé de terminale S (mai 2010)

Les premiers exemples de fonctions f permettent de sensibiliser les élèves à la dépendance de G (appelée f tilde dans l'énoncé) à f, ce qui n'est pas une préoccupation en L1, les étudiants devant raisonner directement dans le registre symbolique. Des caractéristiques d'énoncés de terminale S se retrouvent, par rapport à des énoncés de L1, concernant la complexité des tâches : la tâche de calcul de la dérivée de G est découpée en deux sous-tâches : question 1a) et question 2a) alors que les étudiants de L1 sont supposés trouver G' directement. Tout en restant dans le domaine de travail F2, la question 1b) partie 2 comporte des adaptations de connaissances pour les lycéens, mais elle ne questionne toujours pas les perspectives. Ce sont les questions 2b) et 3a) qui obligent ici à sortir du domaine de travail F2 et qui permettent de tester la capacité des élèves à manipuler des fonctions de façon symbolique sous les perspectives ponctuelle et globale. Autrement dit, comme certaines des questions du partiel de L1, il s'agit de questions qui nécessitent de dépasser les démarches algébrisées.

Dans la question 2b), il faut jouer entre deux propriétés globales sur f et G - f est 2 périodique et G est constante - par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur f - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1)=f(x+1)$. Plus précisément, dans le sens direct par exemple, il faut traduire de façon ponctuelle universelle le fait que G est constante - pour tout x réel, on a $G'(x)=0$. Il faut ensuite réinterpréter l'information ponctuelle universelle - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1)=f(x+1)$ – en périodicité de la fonction f. Remarquons cependant qu'aucune de ces traductions ne met a priori en jeu la perspective globale. En effet, la périodicité et la constance se traduisent de façon ponctuelle universelle (comme nous l'avons signalé plus haut, les programmes ont évacué la perspective locale liée à la dérivabilité et les propriétés globales de variation des fonctions sont réduites à des propriétés ponctuelles universelles de leur dérivée).

Dans la première partie de la question 3a), il faut jouer de la même façon entre deux propriétés globales sur f et G - f et G sont croissantes - par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur f - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) \leq f(x+1)$. Plus précisément, il faut à partir de la propriété globale - f est croissante – écrire la propriété ponctuelle universelle - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) \leq f(x+1)$ – et réinterpréter la propriété ponctuelle universelle – $G'(x) \geq 0$ – en propriété globale – G croissante. Remarquons ici que l'écriture en propriété ponctuelle universelle - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) \leq f(x+1)$ – n'est pas une traduction ponctuelle universelle de la croissance. Il s'agit d'une perte d'information par rapport à l'écriture globale d'une propriété globale – la croissance : pour tout x, y réels, $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ – qui ne peut ici se traduire de façon ponctuelle universelle.

Dans la deuxième partie de la question 3a), il ne s'agit pas par contre de passer d'une propriété globale à une autre en les traduisant de façon ponctuelle universelle. Comme dans l'exercice de L1, la difficulté semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément le point de vue ponctuel sur G en x et le point de vue global sur *f* dans l'intervalle [*x*-1, *x*+1]. En effet, il faut traduire avec deux variables une propriété globale sur *f* - pour tout *x* réel et *t* dans l'intervalle [*x*-1, *x*+1], on a $f(x-1) \leq f(t) \leq f(x+1)$. Une autre méthode consiste à changer de registre et interpréter graphiquement la croissance de *f* et son intégrale sur un intervalle [*x*-1, *x*+1]. Cette question est donc plus complexe que les précédentes car elle met directement en jeu la perspective globale sur *f* et pas uniquement des propriétés ponctuelles universelles.

La question 3b) est quant à elle une simple application, les variations de *f* se déterminent algébriquement (calcul de dérivée, étude de signe).

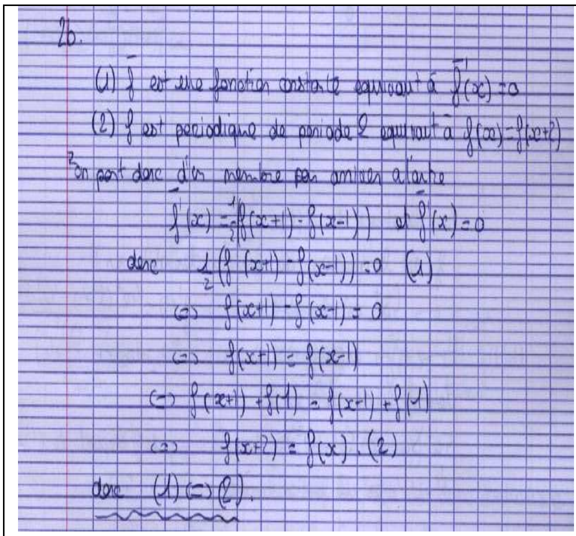
3.c Les résultats des élèves et des étudiants en termes de perspectives

Focalisés sur la transition lycée-université, nous avons choisi de n'analyser que les copies des cinq élèves de la classe de terminale désignés par leur enseignant comme susceptibles de se retrouver à l'université l'année d'après. En effet, dans une première lecture des productions des élèves, il est apparu que celles-ci étaient de bien meilleure qualité globalement que les productions des étudiants de L1, relativement à la difficulté des énoncés. Cela s'expliquait par le fait que bon nombre de bons élèves de terminale ne se retrouvent pas dans les populations d'étudiants de L1. Ils s'orientent beaucoup par exemple vers les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieur. Les copies des étudiants ont par contre toutes été consultées, sans pour autant en faire une analyse exhaustive.

Comme prévu, les difficultés des cinq élèves de terminale ont surtout porté sur les questions 2b) et 3a). Un seul d'entre eux a réussi les deux questions de façon acceptable. Les autres questions, qui ne mettent pas en jeu les perspectives ponctuelle et globale, ont été traitées sans problèmes majeurs. Seule la question 1b), dont nous avons noté plus haut qu'elle est complexe pour les lycéens, est mal réussie majoritairement.

Il apparaît que la question 2b) est moins bien réussie que la première partie de la question 3a), quand bien même les deux mettent en jeu une propriété ponctuelle universelle qui ne fait pas a priori travailler la perspective globale et quand bien même la propriété ponctuelle universelle de la question 3a) n'est pas une traduction mais une perte d'information par rapport à la propriété de croissance.

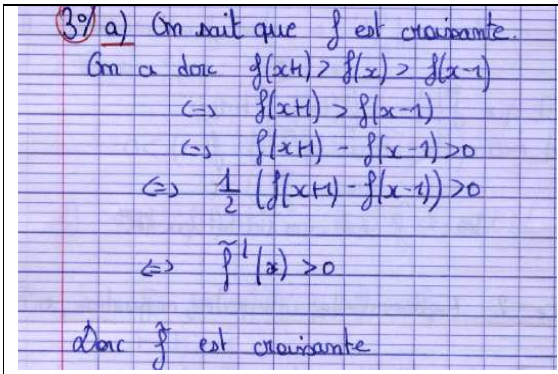
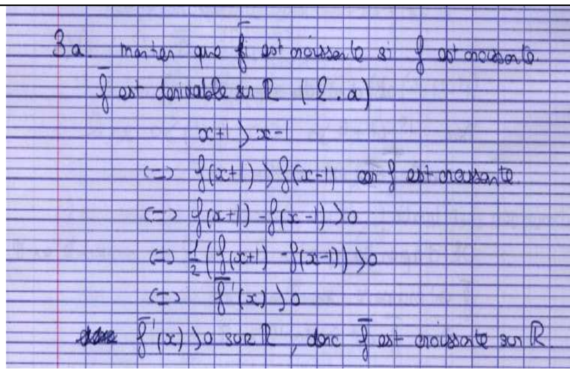
En fait, la traduction des propriétés globales de constance ou de croissance en propriétés ponctuelles universelles $G'(x) = 0$ ou $G'(x) \geq 0$ est routinisée par les élèves de fin de terminale. C'est respectivement en jeu dans les deux questions 2b) et 3a). Sans doute la traduction de la périodicité par la propriété pour tout *x* réel, on a $f(x+t)=f(x)$ est-elle, elle aussi, routinisée chez les élèves. Cependant, la propriété ponctuelle universelle qui apparaît en 2b) est $f(x+1)=f(x-1)$. Son interprétation en périodicité fait donc finalement pleinement travailler la perspective globale. Au contraire, dans la première partie de la question 3a) où il faut traduire la croissance de *f* de façon ponctuelle universelle - pour tout *x* réel, on a $f(x\text{-}1) \leq f(x+1)$, cette traduction est aidé par le contexte et ce à quoi il faut arriver. Ceci semble expliquer cette réussite moindre dans la question 2b) par rapport à la question 3a). Voici un exemple de production d'élève 5 pour la question 2b) :

	(1) *G* est constante ⇔ *G* '(x)=0 (2) *f* est 2 périodique ⇔ *f* (*x*)=*f* (*x*+2) On part d'un membre pour arriver à l'autre : *G*' (*x*) = ½ [*f*(*x*+1)-*f*(*x*-1)] et *G*'(*x*)=0 ... ⇔ *f*(*x*+1) = *f*(*x*-1) ⇔ *f*(*x*+1) + *f*(1) = *f*(*x*-1) + *f*(1) ⇔ *f*(*x*+2) = *f*(*x*) (2) so (1) ⇔ (2).

Élève 5 : question 2b)

L'élève 5 explicite sa procédure « *on part d'un membre pour arriver à l'autre* ». Il n'y a aucune quantification qui traduirait une sensibilité à la perspective globale dans les propriétés ponctuelles universelles. En outre, les équivalences sont fausses. Il est nécessaire pour l'élève de revenir à la forme initiale de la périodicité *f*(x)=*f*(x+2) pour conclure à la périodicité de *f* car l'obtention de *f*(x-1)=*f*(x+1), même sans quantification, n'est pas pour lui une caractérisation de la périodicité. Du coup, ce sont des procédés algébriques qui font foi et tout est mis en œuvre algébriquement pour faire apparaître *f*(x)=*f*(x+2).

Concernant la première partie de la question 3a), la croissance de la fonction *f* est traduite par *f*(*x*-1) < *f*(*x*+1) sans les quantificateurs chez 3 élèves (dont le 5). Il y a également présence d'équivalences, ceci dénotant peut-être aussi l'absence de perspective globale chez ces élèves. Voici les productions des élèves 2 et 5 :

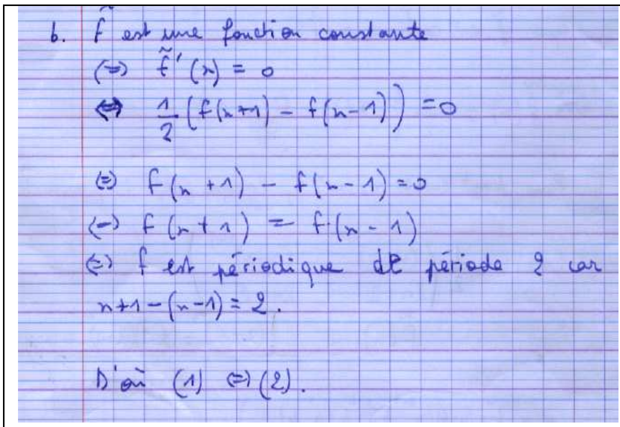
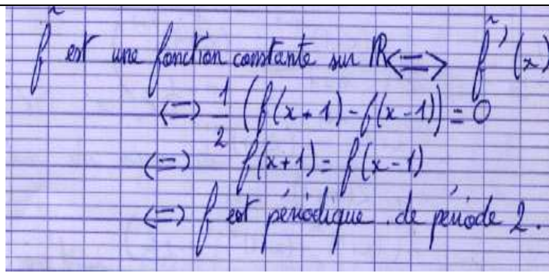
	
3a) On sait que *f* est croissante. On a donc $f(x+1) > f(x) > f(x-1)$ ⇔ $f(x+1) > f(x-1)$ ⇔ $f(x+1) - f(x-1) > 0$ ⇔ ½ $[f(x+1) - f(x-1)] > 0$ ⇔ G' (x) > 0 Donc *G* est croissante.	3a) *G* est dérivable sur ***R*** (2a) $x+1 > x-1$ ⇔ $f(x+1) > f(x-1)$ car *f* est croissante ⇔ $f(x+1) – f(x-1) > 0$ ⇔ ½ $[f(x+1) - f(x-1)] > 0$ ⇔ G' (x) > 0 G' (x) > 0 sur ***R***, donc *G* est croissante sur ***R***.

Élève 2 : question 3a) Élève 5 : question 3a)

La production de l'élève 3 est sensiblement identique à celle de l'élève 2, sans quantificateur, mais il n'y a pas les symboles d'équivalence. Tout se passe comme si ces trois élèves ne travaillaient que dans le domaine F2, où seuls des calculs algébriques permettent de passer d'un état A traduisant des hypothèses à un état B caractéristique du résultat attendu. Le jeu ponctuel / ponctuel universel / global mis à l'œuvre dans ces deux questions est totalement masqué par des procédures algébriques. Les quantifications permettant de mettre en scène ce jeu sont systématiquement absentes. C'est pourtant l'élève 5 qui réussit correctement la deuxième partie de la question 3b) plus complexe mais il reconnait en fait une application immédiate de la formule de la moyenne et passe donc en quelque sorte à côté de l'aspect global.

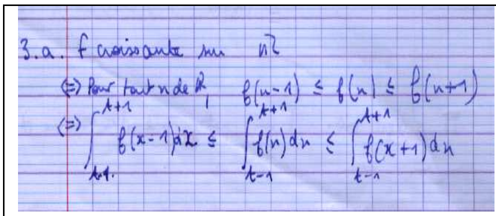
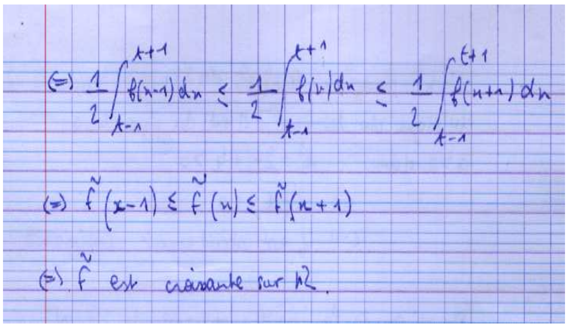
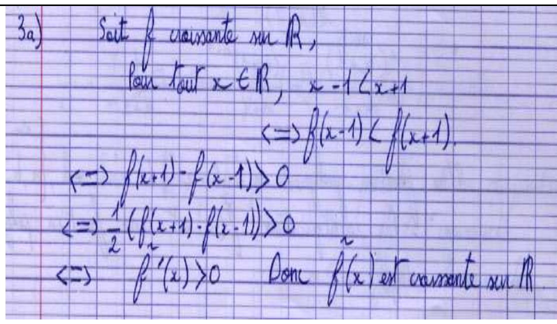
Le profil des élèves 1 et 4 semble par contre un peu différent. Même si des caractéristiques de leurs productions sont similaires à celles des élèves précédents (présence des équivalences notamment, ce qui pourrait sans doute s'expliquer en référant au contrat didactique, Brousseau 1997), il semble que ces élèves sont plus à même d'interpréter ponctuellement ou globalement les écritures symboliques qu'ils manipulent.

Dans la question 2b), ces élèves ne traduisent pas les propriétés globales avec des quantificateurs (mais ils vont le faire en 3a)). Cependant comme nous l'avons remarqué plus haut, la quantification explicite n'est pas nécessaire pour réussir la question 2b) puisque les propriétés globales mises en jeu sont uniquement ponctuelles universelles. Alors il est légitime de se demander si cette quantification n'est pas présente implicitement. En effet, contrairement aux trois élèves du groupe précédent, les élèves 1 et 4 peuvent interpréter directement l'écriture $f(x\text{-}1)=f(x\text{+}1)$ comme la 2-périodicité.

<table>
<tr>
<td>
b. f est une fonction constante
$\Leftrightarrow \tilde{f}'(x) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) = 0$
$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)$
$\Leftrightarrow$ f est périodique de période 2 car $x+1-(x-1) = 2$.
D'où (1) $\Leftrightarrow$ (2).</td>
<td>
$\tilde{f}$ est une fonction constante sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \tilde{f}'(x)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) = 0$
$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)$
$\Leftrightarrow$ f est périodique de période 2.</td>
</tr>
<tr>
<td>b) G est une fonction constante
⇔ $G'(x) = 0$
⇔ ½ $[f(x+1)-f(x-1)] = 0$
…
⇔ $f(x+1) = f(x-1)$
⇔ f est périodique de période 2 car $x+1-(x-1)=2$
D'où (1) ⇔ (2)</td>
<td>G est une fonction constante
⇔ $G'(x) = 0$
⇔ ½ $[f(x+1)-f(x-1)] = 0$
⇔ $f(x+1) = f(x-1)$
⇔ f est périodique de période 2</td>
</tr>
<tr>
<td>Élève 1 : question 2b)</td>
<td>Élève 4 : question 2b)</td>
</tr>
</table>

L'élève 1 explicite d'ailleurs le fait que « *f est périodique de période 2 car x+1-(x-1)=2* ». Autrement dit, ce n'est pas tant la présence du quantificateur qui est importante mais la capacité à interpréter globalement l'écriture $f(x\text{-}1)=f(x\text{+}1)$. Et comme nous l'avons expliqué plus haut, il faut bien mobiliser une perspective globale sur les fonctions pour passer directement de cette écriture (même non quantifiée) à la 2-périodicité, ce que n'ont pas pu faire les élèves du profil précédent.

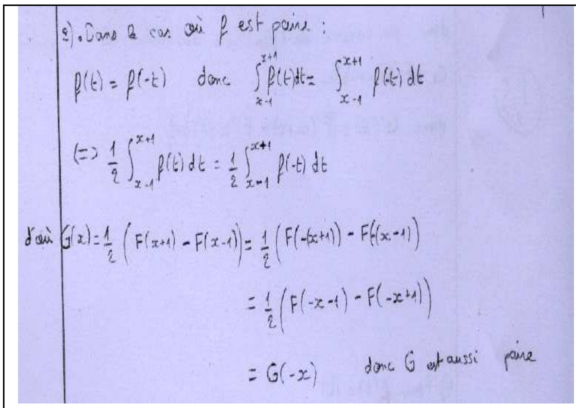
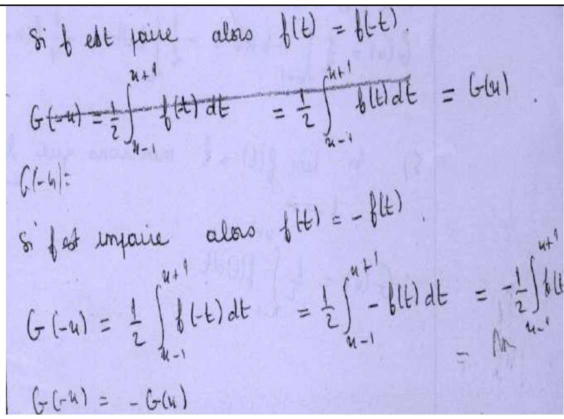
Concernant la question 3a) (première partie), ces deux mêmes élèves mobilisent cette fois explicitement la quantification pour traduire les propriétés globales en propriétés ponctuelles universelles, ce qui peut signifier encore la prise en compte de la perspective globale. Cependant les élèves n'identifient pas qu'il s'agit d'une perte d'information et non d'une traduction ponctuelle universelle de la croissance. Par exemple, l'élève 1 ci-dessous déduit la croissance de G à partir de la relation $G(x\text{-}1) \leq G(x) \leq G(x+1)$, ce qui constitue une grave erreur liée à des lacunes dans cette perspective globale.

 	
3a) f est croissante sur R ⇔Pour tout x de R, $f(x\text{-}1) \leq f(x) \leq f(x+1)$ ⇔ $\int_{t-1}^{t+1} f(x\text{-}1)\mathrm{d}x \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x+1)\mathrm{d}x$ ⇔ … ⇔ $G(x\text{-}1) \leq G(x) \leq G(x+1)$ ⇔ G est croissante sur R	3a) Soit f croissante sur R Pour tout x de R, $x\text{-}1 < x+1$ ⇔ $f(x\text{-}1) < f(x+1)$ ⇔ … ⇔ ½ $[f(x+1) - f(x\text{-}1)] > 0$ ⇔ $G'(x) > 0$ donc G est croissante sur R

Élève 1 : question 3a) partie 1 — Élève 4 : question 3a) partie 1

Ces deux classes (ou profils) ayant été identifiés chez les élèves, nous avons essayé de retrouver des caractéristiques de ces classes chez les étudiants de L1. Ici, les difficultés liées aux changements de perspectives pertinentes ou nécessaires pour résoudre les questions concernent les questions 2) et 4).

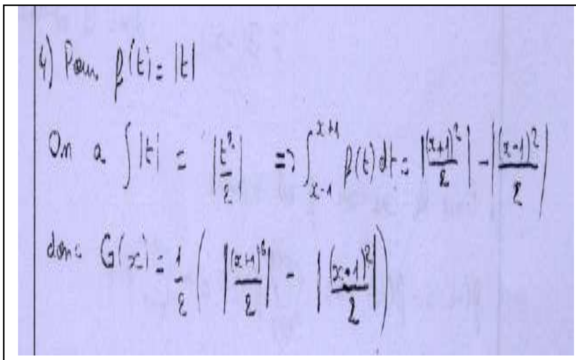
Chez beaucoup d'étudiants de L1, les propriétés globales, dans la question 2) en particulier, sont traduites sans quantificateurs. Ceci entraîne un amalgame entre les différentes perspectives qui sont masquées par des procédures algébriques. Les écritures ne peuvent jamais être interprétées quand c'est nécessaire. Il s'en suit chez des étudiants une confusion entre les variables et une non distinction des rôles différents que chacune d'entre elle tient : ponctuel pour le x et global pour le t, comme dans les deux exemples ci-dessous :

	
Dans le cas où *f* est paire : $f(t)=f(-t)$ donc $\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = \int_{x-1}^{x+1} f(-t)dt$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-t)\, dt$ donc $G(x)= \frac{1}{2}\ [F(x+1) - F(x-1)] = \frac{1}{2}\ [F(-(x+1)) - F(-(x-1))]$ $= \frac{1}{2}\ [F(-x-1) - F(-x+1)] = G(-x)$ donc *G* est aussi paire	Si *f* paire alors $f(t)=f(-t)$ $G(-x)=$ Si f impaire alors $f(-t)=-f(t)$ $G(-x)= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-t)\, dt$ $= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} -f(t)\, dt = -\frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt$ $G(-x) = -G(x)$

Exemples de réponses à la question 2)

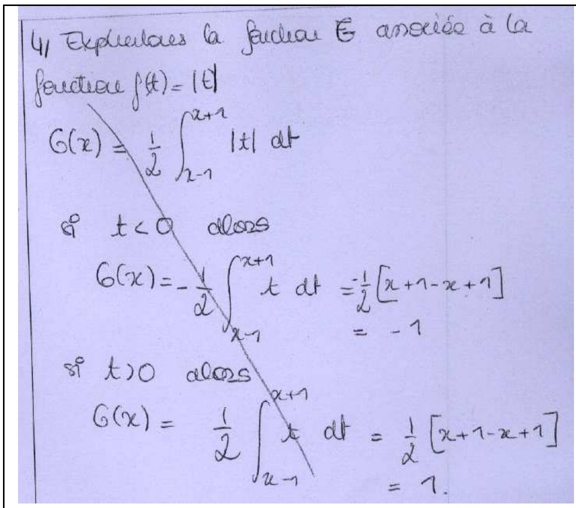
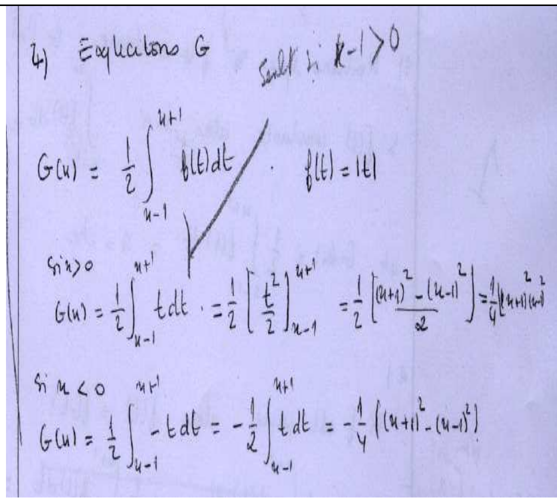
D'un autre côté, il y a des copies où la mise en perspective globale est mieux assurée, même implicitement, lorsqu'elle est pertinente. Les quantificateurs sont présents pour traduire les propriétés globales, en particulier ici lorsqu'il s'agit d'intégrer une relation d'égalité. Cela ne permet pas pour autant à ces étudiants de réussir les questions mais des arguments globaux sont mentionnés : « *c'est la même partie qu'il faut intégrer* » ou « *si deux fonctions sont égales, leurs primitives sont égales* ».

Concernant la question 4), cette distinction se retrouve à nouveau. Pour une partie des étudiants, les procédures mobilisées ne relèvent que du domaine de travail F2 comme dans la copie suivante.

	4) Pour $f(t)=\| t \|$ On a $\int \| t \| = \| t^2 / 2 \|$ => $\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt = \| (x+1)^2 / 2 \| - \| (x-1)^2 / 2 \|$ donc $G(x)= \frac{1}{2}\ [\| (x+1)^2 / 2 \| - \| (x-1)^2 / 2 \|]$

Exemple de réponses à la question 4)

Chez d’autres étudiants par contre, il y a une prise en compte des cas de figure, même si à nouveau cela ne mène pas aux bonnes solutions.

 4) Explicitons la fonction G associée à la fonction $f(t) = \|t\|$ $G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \|t\|\, dt$ si $t<0$ alors $G(x) = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\, dt = -\frac{1}{2}[x+1-x+1] = -1$ si $t>0$ alors $G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\, dt = \frac{1}{2}[x+1-x+1] = 1.$	 4) Explicitons G Seult si $x-1>0$ $G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. $f(t) = \|t\|$ Si $x>0$ $G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{2}\right] = \frac{1}{4}[(x+1)^2 - (x-1)^2]$ Si $x<0$ $G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} -t\,dt = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\,dt = -\frac{1}{4}((x+1)^2-(x-1)^2)$
4) Explicitons la fonction *G* associée à la fonction *f*(|t|) $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} \|t\|\, dt$ Si t < 0 alors $G(x) = -½ \int_{x-1}^{x+1} t\, dt = -½\, [x+1-x+1]$ $= -1$ Si t > 0 alors $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} t\, dt = ½\, [x+1-x+1]$ $= 1$	4) Explicitons *G* $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt \quad f(t) = \|t\|$ Si $x > 0$ $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} t\, dt = ½\, [\, t^2 / 2]_{x-1}^{x+1} =$ … Si $x < 0$ $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} -t\, dt = -½\, [\, t^2 / 2]_{x-1}^{x+1} =$ …

Exemples de réponses à la question 4)

On trouve extrêmement peu de procédures correctes sur l’ensemble des questions et des étudiants de L1, mais une condition nécessaire à la réussite semble bien être que l’étudiant fasse partie du deuxième groupe. Dans les deux copies précédentes, il apparaît clairement combien, même en ayant pris conscience du fait qu’il faille considérer des cas, il est difficile de gérer simultanément la perspective ponctuelle sur *G* - calcul de *G*(*x*) pour des valeurs de $x < 1$, *x* dans [-1,1] ou $x > 1$ - et la perspective globale sur la valeur absolue – considération de | t | pour t dans [x-1,x+1] - ou pour dire autrement les deux variables en jeu, le domaine de variation de *t* étant défini par rapport à la première variable *x*. C’est sans aucun doute une difficulté supplémentaire de cette question, qui dépasse les seules considérations sur les perspectives ponctuelle et globale.

4. Conclusions et discussion

A l'issue de notre synthèse de résultats déjà mis en évidence dans de nombreux travaux, nous émettons l'hypothèse que le cadre fonctionnel est réduit à un cadre algébrique chez les élèves de fin de terminale scientifique, avec la manipulation de formules algébriques sans le « relief » que l'enseignement a voulu donner à la notion de fonction dans le domaine de travail F1. Ce cadre algébrique suppose tout de même la possibilité de travailler avec des expressions symboliques et la possibilité d'envisager un certain degré de généralité, comme dans l'exercice d'intégration présenté ci-dessus. Cependant, il développe chez certains élèves une approche algébrique qui limite leurs possibilités à l'entrée dans l'Analyse.

En effet, les deux perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions, qui ne semblent déjà pas suffisamment repérés par les élèves à l'issue de leur travail dans le domaine F1, ne sont plus suffisamment manipulées dans le domaine F2 du fait de l'insuffisance des formules algébriques vis-à-vis de la perspective globale, du faible herbier de fonctions disponibles et de la sous-exploitation des représentations globales (graphique ou tableau de variation) comme outil heuristique[5] de l'activité mathématique. Les propriétés globales de variation sont en outre réduites à des propriétés ponctuelles universelles, grâce aux hypothèses fortes de dérivabilité, ce qui ne favorise pas la nécessité des quantificateurs et nuit également au travail de la perspective globale. Du coup, le manque de disponibilité de cette perspective globale, la non articulation entre les perspectives ponctuelle et globale, associés à la seule disponibilité du registre algébrique au détriment des registres graphiques ou symbolique, constitue sans doute l'un des obstacles majeurs à l'entrée des lycéens et des étudiants dans les exercices d'Analyse, où les mises en perspectives sont souvent pertinentes (sans pour autant parler nécessairement d'exercices mettant en jeu des notions locales).

Ces hypothèses semblent confirmées par les résultats à l'issue de notre exercice d'intégration proposé aux lycéens et étudiants. En cherchant à préciser les conceptions sur les fonctions à l'issue de la terminale scientifique et à l'entrée à l'université, nous pouvons ici dégager deux populations d'élèves et d'étudiants.

Certains étudiants à l'entrée de l'université n'ont plus aucune disponibilité de la richesse qui leur a été enseignée à propos des fonctions. Ils ne raisonnent plus qu'algébriquement sans pouvoir se détacher des représentations issues des formules et sans pouvoir adopter la ou les perspectives pertinentes pour les questions en jeu. Hors des situations algébrisées, les fonctions sont considérées

[5] En reprenant Duval (1999), les représentations graphiques sont essentiellement réduites à un rôle iconique : « Iconic representations refer to a previous perception of represented object […] whereas visualization consists in grasping directly the whole configuration of relations and in discriminating what is relevant in it ». De ce fait, la visualisation au sens de Duval peut-être reliée à la perspective globale sur les courbes et à un rôle heuristique de ces représentations. De même qu'adopter la perspective globale est difficile, il n'y a pas toujours visualisation au sens de Duval dès qu'un graphique est utilisé.

au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Les productions de ces étudiants semblent caractérisées par une absence totale des quantificateurs universels pour traduire des propriétés ponctuelles universelles, ce qui peut être associé à la non disponibilité de la perspective globale sur les fonctions. Cette population d'élèves ou d'étudiants est sûrement à mettre en relation avec la conception algébrique – graphique de Balacheff et Gaudin (2002). Elle se retrouve aussi parmi les nombreux étudiants qui n'ont pu raisonner ni ponctuellement ni globalement dans les questions de limites non algébrisées du questionnaire de la CI2U. Ce sont aussi les étudiants qui ont une approche algébrique[6] du concept de fonction au sens de Monoyiou et Gagatsis (2010).

Une deuxième population d'étudiants est par contre capable de dépasser l'approche algébrique et notamment d'adopter, dans certaines situations à mieux circonscrire, la perspective globale sur les représentations manipulées (symboliques, graphiques mais aussi algébriques). Ce sont ici les étudiants qui ont une approche coordonnée du concept de fonctions au sens de Monoyiou et Gagatsis (2010), étant capables d'adopter une perspective globale sur des formules algébriques en référence à la représentation globale graphique. Ces étudiants peuvent notamment introduire plus spontanément des quantificateurs universels (sous leur forme symbolique ou non) pour traduire que certaines propriétés utilisées sont globales ou même ponctuelles universelles. Ces élèves sont sûrement plus proches de la conception courbe - algébrique de Balacheff. Cette population se rapproche également sans doute des élèves dont Robert (1982, 1983) met en évidence qu'ils disposent d'une conception statique de la notion locale de limite, favorable à une conceptualisation correcte de la définition. Il faut enfin rapprocher ce résultat du fait que les étudiants du questionnaire de la CI2U qui ont pu raisonner d'un point de vue global pour les calculs de limites sont ceux qui statistiquement avaient eu une meilleure réussite au baccalauréat.

Ces résultats sont à affiner mais considérant au final que l'adoption de la perspective globale est une nécessité pour aborder le travail local, avec toutes ses contraintes, nous concluons que l'approche algébrique exclusive fait obstacle à l'entrée dans le champ de l'Analyse et notamment à la conceptualisation des notions locales sur les fonctions, travaillées explicitement dès le début de l'université. Un facteur prédictif de succès des étudiants à l'entrée à l'université est ainsi qu'ils puissent dépasser l'approche algébrique, qu'ils puissent avoir une approche coordonnée des différentes représentations des fonctions et qu'ils puissent adopter les perspectives globale ou locale - même dans des

---

[6] Dire « conception algébrique » nous semble trop fort étant donné les limites de notre étude et ce que sous tend le terme de conceptions .

manipulations algébriques : par exemple, détecter les termes prédominants ou négligeables dans des calculs de limites « complexes », ce que sait faire l'expert mathématicien.

Ce travail invite à étendre le domaine de travail F1 jusqu'à la terminale et à l'imbriquer avec le domaine F2 pour mieux préparer le domaine F3. Cela signifie d'une part enrichir l'herbier de fonctions disponible dans le domaine F1 afin que les élèves puissent se représenter globalement les fonctions en jeu à travers des manipulations de formules. Cela signifie aussi ancrer dans le domaine F1 les problèmes de calculs de limites, de calculs de dérivée et d'étude de variations qui relèvent actuellement uniquement du domaine F2 et ne sont plus connectées à des situations concrètes pour les élèves. Enfin, cela signifie travailler dès le domaine F1 des problèmes locaux afin de pouvoir envisager au sein de ce domaine de travail F1 à la fois des questions ponctuelles, des questions globales et des questions relevant de l'aspect local des fonctions. En ce sens, le travail avec les technologies que nous envisageons dans le chapitre 2 est une opportunité pour enrichir le domaine de travail F1 dans ces directions, par exemple en reliant des tâches relevant du travail algébrique à des représentations dynamiques géométriques ou graphiques des fonctions en jeu.

Le travail de recherche reste lui aussi à poursuivre, pour l'étendre à tous le champ de l'Analyse et notamment relier les trois domaines de travail sur les fonctions, les multiples niveaux de conceptualisation caractérisés de diverses manières, à des espaces de travail en Analyse (ETA). Par exemple, les artefacts des ETA seraient à relier aux outils technologiques pour l'Analyse mais tout ce travail théorique reste à faire.

Bibliographie du chapitre 1

ARTIGUE M. (1991) Analysis. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

ARTIGUE M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de références. *Repère IREM*. Vol 11. pp 115-139.

ARTIGUE M., BATANERO C., KENT P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. Dans F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.1011-1049). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc.

BACHELARD G. (1938) La formation de l'esprit scientifique, Paris: Vrin.

BALACHEFF N., GAUDIN N. (2002) *Students conceptions: an introduction to a formal characterization*. Cahier Leibniz, Numéro 65, Publication de l'Université Joseph Fourrier. http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00190425_v1/

BLOCH I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*. Vol 58. pp 25-46.

BLOCH I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 52. pp 3-28.

BLOCH I. (2005) The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and the university: factors of rupture. Communication to the Topic Study Group 12, Dans M. Niss (Eds.) *Actes de ICME10.* Copenhagen. Copenhagen: Roskilde University.

BRIDOUX S. (2011) Enseignement des premières notions de topologie à l'université : une étude de cas. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.

BROUSSEAU G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CASTELA C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 15 (1). pp 7-48.

CHORLAY R. (2011) Local-global: the first twenty years. *Archives for history for exact sciences*. Vol 65. pp 1-66.

COMIN E. (2005) Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. *Petit x*. Vol 67. pp 33-61.

COPPE S., DORIER J.-L., YAVUZ I. (2007) De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 27 (2). pp 151-186.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 7 (2). pp 5-31.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

DUVAL R. (1991) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 5. pp 37-65.

DUVAL R. (1993) Graphiques et équations: l'articulation de deux registres, Caen: C.E.R.S.E.

DUVAL R. (1999) Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning, Dans F. Hitt et M. Santos (Eds.) *Actes de 21st North American PME Conference.* 1. 3-26.

ELIA I., et al. (2008) Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technology*. Vol 8 (1). pp 49-69.

GAGATSIS A., et al. (2010) Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics*. Vol 10. pp 51-67.

GRENIER-BOLEY N. (2009) Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université. Cahier de Didirem, Numéro 59, Publication de IREM de Paris 7.

GUEUDET G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 67. pp 237-254.

KUZNIAK A. (2010) L'espace de travail mathématique et ses genèses, Dans *Actes de Deuxième Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Work Space »*. 9-18. Paris.

LEPLAT J. (1997) Contribution à la psychologie ergonomique, Paris: PUF.

MASCHIETTO M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 21 (1-2). pp 123-156.

MASCHIETTO M. (2008) Graphic Calculators and Micro Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*. Vol 13. pp 207-230.

MONOYIOU A., GAGATSIS A. (2010) Pre-service teachers' approaches in function problem solving: A comparative study between Cyprus and Italy. *Quaderni di Ricerca in Didattica Mathematica*. Vol 1-2. pp 9-23.

PIAGET J., GARCIA R. (1989) *Psychogenesis and the history of science,* New-York: Colombia University Press.

PRASLON F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.

RAFTOPOULOS A., PORTIDES D. (2010) Le concept de fonction et sa représentation spaciale, Dans *Actes de Deuxième Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Work Space »*. 201-214. Paris.

ROBERT A. (1982) Divers travaux de mathématiques et l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. Thèse d'Etat. Université Paris 7.

ROBERT A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*. Vol 340. pp 431-449.

ROBERT A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2). pp 139-190.

ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième: l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x*. Vol 63. pp 7-29.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59-68). Toulouse: Octarès Edition.

ROBERT A. (2011) Des recherches de type "ingénierie". Dans C. Margolinas, et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble: La pensée sauvage.

ROBERT A., BOSCHET F. (1984) *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année*. Cahier de didactique des mathématiques, Numéro 7, Publication de IREM de Paris 7.

ROGALSKI J. (1984) Représentations graphiques dans l'enseignement: concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonction. Dans A. Giordan et J.-L. Martinand (Eds.) *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifiques. Sixième journées internationales sur l'éducation scientifique et technique* (pp.379-388). Chamonix:

ROGALSKI J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.23-30). Toulouses: Octarès Editions.

ROGALSKI M. (2008) Les rapports entre local et global: mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (Eds.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp.61-87). Paris: PUF.

SCHNEIDER M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repère IREM*. Vol 5. pp 65-82.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 22. pp 1-36.

SIERPINSKA A. (1992) On understanding the notion of function. Dans G. Harel et E. Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America Notes, volume 25.

TALL D. (1996) Functions and calculus. Dans A. J. Bishop, et al. (Eds.) *International handbook of mathematics education* (pp.289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

TALL D. (2006) A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 11. pp 195-215.

TALL D., VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 12. pp 151-169.

VANDEBROUCK F. (2008a) Functions at the transition between French upper secondary school and University. Communication de la commission inter irem université (CI2U), Dans *Actes de ICMI.* Monterey, Mexico.

VANDEBROUCK F. (Eds) (2008b) La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants, Toulouses: Octarès.

VANDEBROUCK F. (2011) Points de vue et domaines de travail en analyse. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 16. pp 149-185.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 10 (2-3). pp 133-169.

VERGNAUD G. (1996) Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds.) *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.174-185). Clermont-Ferrand: IREM.

VERGNAUD G. (1999/2002) On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget. Dans Y. Clot (Eds.) *Avec Vygotski* (pp.55-68). Paris: La dispute.

VINNER S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology,* Vol 14 (3). pp 293-305.

VIVIER L. (2010) Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 15. pp 173-199.

Chapitre 2 : l'activité des élèves en Analyse avec les nouvelles technologies

Ce deuxième chapitre concerne l'usage des technologies pour l'enseignement de l'Analyse du lycée à l'université, en particulier l'enseignement des notions liées aux fonctions numériques. Dans le premier chapitre, nous avons analysé les difficultés des étudiants de première année d'université dans ce domaine et relié ces difficultés avec deux approches que pouvaient avoir les étudiants en ce qui concerne la notion de fonction : une approche algébrique et une approche coordonnée au sens où les étudiants sont capables de coordonner dans leurs pratiques le registre graphique et les représentations algébriques des fonctions.

Nous avons également relié ces difficultés aux aspects ponctuels, globaux ou locaux des fonctions et aux trois perspectives qui peuvent être adoptées sur leurs représentations : la perspective ponctuelle, la perspective globale et enfin la perspective locale, qui prend de l'importance au début de l'université et pour laquelle l'aptitude à pouvoir adopter la perspective globale sur les fonctions semble être un préalable important. Nous avons relié cette notion de perspective globale à l'approche coordonnée des fonctions et nous avons analysé la difficulté à adopter la perspective globale, la persistance de la perspective ponctuelle, voire l'absence de perspectives, par l'importance que prend la manipulation des fonctions à partir de la classe de 1ère S dans un domaine de travail que nous avons appelé F2. Ce domaine est caractérisé par des tâches relevant essentiellement du registre algébrique, qui plus est mettant en jeu des notions (essentiellement des notions de variation) qui même si elles portent sur les aspects globaux des fonctions peuvent se traduire de façon ponctuelle universelle. Les étudiants peuvent alors les traiter algébriquement, sans trouver l'utilisation de quantificateurs universels pertinente. Ce domaine de travail F2 favoriserait donc chez les étudiants l'approche algébrique et serait un obstacle à l'adoption de la perspective locale pour l'entrée de l'université.

Les technologies sont donc envisagées dans ce chapitre comme un enrichissement des domaines de travail F1 et F2 afin d'une part que « l'herbier » (Robert 2011) de fonctions disponibles chez les étudiants au lycée, algébriquement et graphiquement, soit enrichi et que le travail algébrique dans le domaine F2 puisse s'articuler avec le travail dans le domaine F1 et non s'y substituer.

Dans le premier paragraphe, nous situons nos recherches théoriquement, complétant les éléments théoriques proposés dans le chapitre 1. Dans le second paragraphe, nous traitons de l'usage des bases d'exercices en ligne (BEL) comme remédiation pour les notions d'Analyse aux niveaux des classes de seconde et de première année d'université. Dans le troisième paragraphe, nous traitons de l'usage de technologies ouvertes (ici Géogébra) pour enrichir le domaine de travail F1 en classes de seconde et première, dans le cadre d'une démarche expérimentale. Dans la dernière partie qui ouvre des perspectives, nous abordons des recherches sur des usages de Géogébra pour articuler en classe de terminale les domaines F1 et F2 et préparer l'Analyse locale (continuité locale, dérivabilité locale) avec les technologies ouvertes.

1. Compléments théorique pour étudier l'activité des élèves et des étudiants avec les technologies

Nous situons nos recherches dans le cadre général de la théorie de l'activité (Vygotski 1934/1997, Léontiev 1984), contextualisée à la didactique des mathématiques et à la situation scolaire avec la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert et Rogalski 2002), mettant l'action (et donc l'activité) au cœur des processus de conceptualisation des sujets apprenants (Piaget 1970/2005, Vergnaud 1990). Pour analyser l'action effective des élèves et des étudiants avec les technologies, nous mettons en jeu des concepts directement importés de la théorie de l'activité.

Nous entendons la théorie de l'activité telle qu'elle a été développée dans le contexte des recherches françaises, dans le champ de la psychologie ergonomique ou ergonomie cognitive (Vergnaud 1996, Leplat 1997, Rogalski 2008). Ce développement a apporté dans la théorie de l'activité les distinctions fondamentales entre sujet et situation d'une part et entre tâche et activité d'autre part. Dans cette approche francophone, l'activité du sujet est donc développée en situation et l'analyse de la situation est de ce fait centrale pour étudiée l'activité du sujet. En particulier, la tâche est centrale. Elle correspond au but que le sujet doit atteindre compte tenu d'un double système de déterminants liés au sujet ou liés à la situation (Leplat 1997). Ici les outils d'analyse de tâches introduits par Robert (1998) sont importés pour inférer l'activité des élèves et des étudiants : les tâches appellent-elles des applications immédiates de connaissances mathématiques explicitées (niveau technique) ou bien y a-t-il au contraire des adaptations à apporter, des sous-tâches et/ou des reconnaissances à effectuer ? L'activité est alors ce que développe le sujet pour la réalisation de ces tâches. La théorie est exposée en détail dans Vandebrouck (2008b).

Certaines recherches relevant de la théorie de l'activité introduisent la notion de système d'activité, désignant des organisations sociales plus ou moins complexes au-delà du sujet individuel (Engeström et al. 1999, Jaworski et Goodchild 2006). Ces travaux se situent à un grain d'analyse plus important que celui que nous adoptons dans nos recherches ; ainsi, nous n'utilisons pas ici de telles références même si elles nous ont aidé dans certaines recherches sur les enseignants utilisant les bases d'exercices en ligne (Abboud-Blanchard et al. 2009). Le découpage classique en trois niveaux de finalité de l'activité est repris : le motif de l'activité du sujet, le but de l'action et enfin les opérations qu'il faut effectuer pour réaliser l'action sous certaines conditions (Galperine 1966, Léontiev 1984).

Le développement de la théorie de l'activité en ergonomie cognitive a permis un recentrage sur la dimension constructive de l'activité du sujet. Selon Vergnaud (1991) et la théorie de conceptualisation dans l'action, « *le problème est source et critère de connaissance* ». Dans le modèle de Leplat (1997), l'accent est mis sur la double régulation de l'activité : les résultats de l'activité du sujet occasionnent des régulations fonctionnelles de son activité tandis que les effets de son activité sont des apprentissages qui occasionnent des régulations structurantes sur le plus long terme. Dans le contexte de l'activité instrumentée, Samurcay et Rabardel (2004) introduisent en outre la dialectique spécifique entre activité productive et activité constructive : par ses actions sur la machine, le sujet élève, confronté à une tâche proposée, développe ce que nous qualifions de versant productif de l'activité[7], qui peut induire des modifications (matérielles ou symboliques) de la situation à laquelle il travaille. Mais ce faisant, il développe aussi ses connaissances ou s'en construit de nouvelles (versant constructif de l'activité, Pastré et Rabardel 2005). Ce sont ces dialectiques fonctionnelle-structurante et productif-constructif qui guident dans ce chapitre 2 nos recherches sur les activités des élèves dans des situations d'usage des technologies (Vandebrouck 2008c) - et dans le chapitre 3 nos recherches sur les genèses d'usage des technologies par les professeurs (Vandebrouck 2010, Abboud-Blanchard, Cazes et Vandebrouck 2009, *cf* chapitre 3). Suivant cette direction, Robert (2008) a introduit la distinction entre aides procédurales[8] et aides constructives de l'enseignant à ses élèves, les premières étant directement tournées vers la réalisation de la tâche alors que les secondes visent à développer l'activité constructive des élèves aidés.

Analyser l'activité des élèves avec des technologies suppose donc de s'interroger sur l'équilibre entre activité productive des élèves avec l'outil technologique et activité constructive. Les technologies ont en effet un caractère d'immédiateté qui peut s'opposer au caractère laborieux de l'activité en environnement papier-crayon. Cela engage les élèves à entrer dans l'action, ce qui est positif en vertu de nos hypothèses sur l'apprentissage ; mais cela peut aussi les enfermer dans le versant productif de l'activité, voire favoriser ce que Lagrange (2000) identifie comme des phénomènes de « pêche aux résultats ».

Dans notre cadre théorique, les tâches mathématiques appelant à des adaptations de connaissances ou au travail de la disponibilité des connaissances sont supposées être source de connaissances chez les élèves, c'est-à-dire induire chez les élèves du développement et des apprentissages (activité constructive). Ceci justifie nos analyses systématiques de ces adaptations de connaissances ou de la disponibilité des connaissances mise en jeu dans les tâches prescrites, avec les

---

[7] Ce mot de productif n'est pas toujours connoté positivement (la réussite de l'action), comme c'est le cas en didactique professionnelle

[8] Procédurales plutôt que productives, *cf* note 1

outils proposés par Robert (1998). Ceci justifie en particulier de rechercher chez les élèves les activités de changements de cadres, de conversions entre registres de représentations et plus généralement de tout ce qui peut relever des changements de points de vue qui sont caractéristiques de l'activité mathématique sur les fonctions. Il ne s'agit pas d'un cadrage exclusivement centré sur l'usage des technologies pour l'apprentissage comme l'est l'approche instrumentale. Dans nos analyses de tâches, nous prenons cependant en compte tout l'environnement logiciel des tâches, c'est-à-dire toutes les aides ou les indices externes amenés par le logiciel et qui peuvent constituer ou non des aides à la réalisation des tâches sur la machine et/ou à l'activité constructive.

2. L'activité des élèves et des étudiants avec des bases d'exercices

2.a Généralités sur les bases d'exercices en ligne

Les bases d'exercices en ligne (BEL) sont des logiciels proposant des exercices dans un environnement numérique d'apprentissage, comprenant une ou plusieurs des fonctionnalités suivantes : cours, indications pour la résolution, aides fournies par des calculateurs, aides graphiques, analyse de réponse, solution rédigée et commentée, évaluation notée, mémorisation du parcours de l'apprenant. De nombreux produits de ce type ont vu le jour ces dernières années. Ils peuvent être conçus par des communautés d'enseignants, c'est le cas de MathenPoche ou de Wims, par l'institution, c'est le cas de la base Euler dans l'académie de Versailles ou de l'Université en Ligne (UeL), ou encore par des entreprises privées (Paraschool). Ils peuvent être utilisés dans des situations de classe ou des situations parascolaires et ils peuvent différer grandement suivant leur structure logicielle (navigation, classification des exercices…), leur structure didactique (énoncés fixes, paramétrés ou à variations aléatoires, types de réponses attendus, types d'aides disponibles, interactivité générale…) ou leur contenus mathématiques (connaissances abordées, types de tâches…). Par exemple, ils peuvent être conçus directement pour l'élève ou plus orientés pour un usage par l'intermédiaire du professeur. Dans ce dernier cas, ils peuvent être plus ou moins ouverts, c'est-à-dire, suivant les cas, permettre au professeur utilisateur de choisir ses exercices dans un panel disponible, de construire un plan de travail pour ses élèves, de paramétrer ses exercices ou encore d'en concevoir de nouveaux (Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck 2006).

L'usage des BEL s'est beaucoup répandu ces dernières années ; il a même été encouragé par l'institution, par exemple, par l'intermédiaire de l'usage des espaces numériques de travail. Il apparaît aussi comme une réponse possible à la demande institutionnelle d'enseignement différencié. L'IREM de Paris a été amené, dans le cas d'un projet régional, à étudier leur usage au niveau du lycée, et dans le cadre de recherche sur les problèmes de la transition lycée université, à étudier leur usage en première année d'université. C'est dans ce cadre que sont écrits plusieurs articles sur l'activité des élèves avec des BEL et sur l'évolution des pratiques enseignantes. C'est dans ce contexte aussi qu'ont commencé nos recherches liant usage technologies et entrée dans l'Analyse, spécifiquement l'étude des fonctions.

D'une façon générale, nos travaux (Vandebrouck 2009, 2008c, 2007, 2006, Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck 2006, Hersant et Vandebrouck 2006, Vandebrouck et Cazes 2005) montrent que les recherches à entreprendre sur l'usage des BEL ne sont pas du même type que celles déjà réalisées pour étudier l'intégration de technologies telles que les calculatrices, les logiciels de calcul formel (CAS), les logiciels de géométrie dynamique ou le tableur. En effet, ces technologies, à la différence des BEL, sont des environnements ouverts et elles ne proposent pas de tâches prédéfinies. Les études portant sur leurs usages consistent souvent en l'élaboration et l'implantation en classe de situations didactiques, où le « milieu » (Brousseau 1997), est un milieu antagoniste, favorisant chez les élèves la construction de connaissances nouvelles. Dans le cas des BEL, au contraire, des tâches mathématiques sont implantées dans les outils et le milieu se veut un allié pour aider les élèves à réussir les tâches proposées. En outre, la question de prise en main des outils est moins complexe dans le cas des BEL et elle suscite moins les questions de genèses instrumentales développées dans le cas des environnements ouverts. Enfin, nos travaux soulèvent de nouvelles questions liées aux rythmes d'activité des étudiants et à la gestion autonome de leur activité avec la BEL.

Dans les usages qui ont été observés, que ce soit au lycée ou à l'université, les BEL permettent une forte individualisation de l'activité des élèves par rapport à des séances d'exercices traditionnelles (travaux dirigés à l'université notamment), quant bien même les élèves suivent toujours un plan de travail proposé par le professeur. Le modèle de double régulation de l'activité (Leplat 1997) permet étudier finement l'activité des élèves avec les BEL et notamment de mettre en évidence des régularités et des disparités entre élèves dans l'organisation de cette activité autonome des élèves. En effet, les résultats de l'activité modifient la situation de départ et sont particulièrement observables : par exemple, des régulations fonctionnelles[9] sont induites par les rétroactions de la BEL, qui renvoient l'élève à son activité, dans un système de boucles continuelles. Nous retrouvons l'hypothèse selon laquelle la régulation fonctionnelle de l'activité de l'élève sur sa machine, au fil de situations similaires, quand l'élève recommence plusieurs fois en boucle un exercice pendant une séance, traduit chez lui un certain apprentissage sur le court ou moyen terme (boucles courtes ou moyennes dans le schéma de double régulation de l'activité de Leplat, 1997). La question des apprentissages sur le long terme,

---

[9] Le modèle de Leplat permet d'introduire une dialectique entre régulation fonctionnelle de l'activité, engendrée par une modification de la situation à partir de laquelle l'élève travaille, et régulation structurante de l'activité, engendrée par un développement ou un apprentissage de l'élève

sur le transfert des apprentissages avec la BEL vers l'environnement papier crayon, est plus complexe et de ce fait nos résultats ne sont que limités.

L'introduction des analyses de tâches révèle que ces dernières sont souvent très proches des tâches que peuvent proposer les professeurs en séances traditionnelles, les observations montrent que les élèves travaillent beaucoup plus pendant les séances BEL que pendant les séances traditionnelles Par exemple, dans Vandebrouck et Cazes (2005), le relevé objectif des traces d'activité sur la BEL Wims[10] montre que même sur des tâches d'applications immédiates de connaissances, beaucoup d'étudiants en première année de l'université peuvent travailler plusieurs dizaine de minutes, recommençant l'exercice autant de fois que nécessaire pour eux alors qu'en environnement papier crayon ou durant une séance de TD classique, il n'aurait été traité qu'un seul exemple. Ce même relevé de traces montre que les étudiants ne se découragent pas non plus, en général, face aux exercices qui demandent des adaptations de connaissances. La situation est ainsi différente de la situation traditionnelle car les élèves ont plus de responsabilités dans leur activité et ils peuvent suivre à leur rythme le plan de travail proposé par l'enseignant. S'ils ne font rien, il ne se passe rien. En particulier, il n'y a que rarement des moments de corrections collectives que les élèves pourraient attendre. Cependant, gérer l'avancée dans le parcours, refaire ou changer d'exercice, activer une aide ou une correction, choisir de prendre des notes, contribue certes à la responsabilisation des élèves mais se révèle parfois être une source de premières difficultés, surtout pour des élèves faibles au lycée. Certains d'entre eux préfèrent parfois continuer à réussir des exercices simples plutôt que d'affronter les exercices plus difficiles (Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck 2006).

Dans Vandebrouck (2008c), nous étudions de façon plus qualitative l'activité d'élèves de classes de seconde sur des BEL. Nos résultats concernent la valorisation de l'activité productive occasionnée par ces outils, avec souvent des décalages entre l'activité attendue et l'activité observée chez les élèves (Artigue et al. 2006). Ce peut être parce que la tâche n'est pas une tâche d'application immédiate, que les connaissances à utiliser ne sont pas explicitées ou parfois que l'environnement logiciel complexifie la tâche par rapport à l'environnement traditionnel. Dès le début du déroulement de l'exercice, une modification de la situation de départ doit donc être opérée pour que l'activité effective de l'élève soit conforme à l'activité attendue. Cette modification est opérée grâce à l'enseignant s'il est présent au bon moment et cela soulève donc le problème du travail en totale autonomie avec ces outils dès que l'on veut aborder des tâches un peu complexes. Le décalage peut être aussi dû à la dénaturation de la tâche par l'environnement logiciel, qui peut permettre par exemple d'obtenir la bonne réponse sans développer l'activité mathématique attendue (notamment dans le

[10] http://wims.auto.u-psud.fr/wims

cas de QCM à choix double, mais nous avons aussi repéré des exemples plus complexes) ou qui peut aussi favoriser une activité plus économique, du type essai/erreur en particulier. Du côté des résultats de l'activité, nous avons aussi trouvé que les rétroactions logicielles aux actions des élèves sont souvent insuffisantes, trop difficiles à comprendre par les élèves pour leur permettre de réguler seuls et correctement leur activité, voire inadaptées à l'activité effective. Les rétroactions ne peuvent en effet porter que sur le résultat de l'activité et non sur l'activité elle-même. Il est de fait très difficile d'implémenter a priori des rétroactions pertinentes et adaptées à la diversité des élèves.

Ces difficultés, dès que les tâches ne sont pas simples pour les élèves, peuvent générer des boucles d'activité inopérantes. Par exemple, l'élève peut repérer des régularités dans l'affichage des bonnes réponses par la BEL après plusieurs essais infructueux et ces régularités peuvent lui permettent petit à petit d'inférer la bonne réponse à coup sûr. L'environnement allié peut aussi renforcer une certaine logique d'action (posture d'élève) : le motif de l'activité des élèves devient exclusivement l'obtention de la réponse attendue par le logiciel (valorisation de l'activité productive au détriment de l'activité constructive). L'élève peut par exemple se satisfaire de procédures mal adaptées en refaisant plusieurs fois un exercice car celles-ci mènent au bon résultat, voire « assez souvent » au bon résultat. Dans certains cas extrêmes, les décalages d'activité sont inconscients et mènent à des apprentissages non souhaitables.

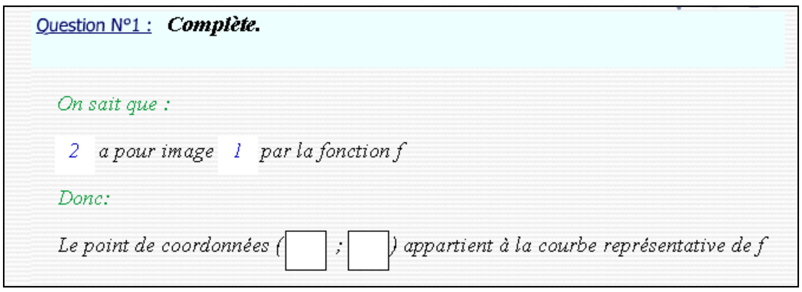
Les BEL semblent donc dans un premier temps bien adaptées pour un travail des élèves sur des exercices techniques, c'est-à-dire des exercices d'applications immédiates de connaissances, qui sont explicitées ou qui sont bien disponibles chez les élèves ou les étudiants. Des analyses de tâches se révèlent donc importantes pour sélectionner les exercices à proposer à des élèves et des étudiants avec une BEL. En ce sens, les BEL redonnent son importance à la routinisation de certaines tâches d'applications immédiates de connaissances, qui sont importantes pour les apprentissages et qui sont souvent négligées dans les séances de travail, au lycée compte tenu des diminutions d'horaires d'enseignement ou au début de l'enseignement supérieur compte tenu des programmes surchargés. Les observations ou les relevés de trace d'activité fournis par certaines BEL montrent que ce travail n'est pas vain, qu'il faut du temps aux élèves et aux étudiants pour réussir ces exercices de base et que ce travail est moins rébarbatif grâce aux potentialités technologiques des BEL.

Dès que les tâches s'éloignent du niveau technique (que l'application ne soit plus immédiate ou que des connaissances doivent être disponibles), il est plus difficile d'obtenir des élèves que les boucles d'activité (l'activité et ses régulations) soient toujours mathématiquement acceptables, c'est-à-dire que les mathématiques produites ou renvoyées soient correctes et cohérentes. Cela ne signifie pas pour autant que les BEL ne puissent pas être utilisables autrement que pour les tâches simples ou immédiates. Cela signifie qu'il y a un phénomène de seuil, qui, s'il est placé trop haut en termes de complexité des tâches, exclut les élèves faibles. La notion de ZPD (Vygotski 1934/1997, Rogalski 2008) est ici particulièrement importante dans la mesure où les élèves travaillent essentiellement en autonomie. Les BEL peuvent notamment accentuer l'hétérogénéité des élèves, si l'enseignant n'est pas spécifiquement vigilant aux élèves en difficultés. Des apprentissages s'observent, sur le moyen terme, pour des élèves confrontés à des tâches comportant des adaptations qui leurs sont accessibles et pour lesquelles ils trouvent des ressources « sur le vif ». Bien souvent, c'est l'enseignant qui est présent (vigilant), et qui a pu réagir à l'activité « réelle » des élèves en question.

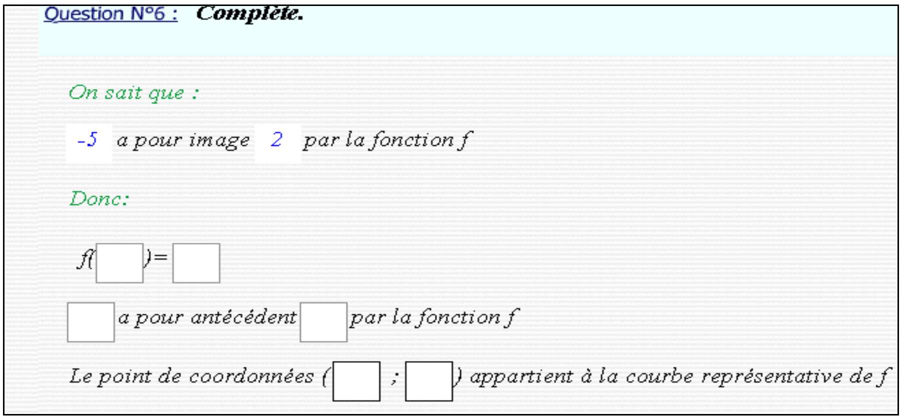
Les exemples ci-dessous visent à illustrer ces phénomènes de décalages d'activité dans le domaine de l'Analyse dès que les tâches ne sont pas immédiates ainsi que des phénomènes d'apprentissages. Ils sont développés à partir des articles cités plus haut, notamment Vandebrouck (2008c) et Vandebrouck et Cazes (2005).

2.b Travail dans les domaines F1 et F2 au lycée et à l'université : des décalages entre activité attendue et activité réelle mais aussi des apprentissages, intentionnels ou incidents

Dans l'exemple ci-dessous en classe de seconde, l'élève Alice observée travaille sur la BEL MathEnPoche pendant une séance de révision sur les fonctions. Le premier exercice contient 10 questions qui mettent en jeu les connaissances des élèves sur « image » et « antécédent ». Cet exercice fait travailler la perspective ponctuelle sur les fonctions dans le domaine de travail F1. En effet, l'exercice concerne le registre numérique sur les fonctions mais il fait travailler les différentes écritures de l'assertion « *x* a pour image *y* par f » : langage naturel, écriture symbolique, écriture en référence au registre graphique. Pour les élèves de la classe de seconde, c'est une adaptation de type A3 au sens de Robert (2008). L'environnement logiciel facilite cependant l'activité puisque l'exercice se présente sous la forme de QCM. Dans les 5 premières questions, il n'y a que deux choix possibles pour les élèves.



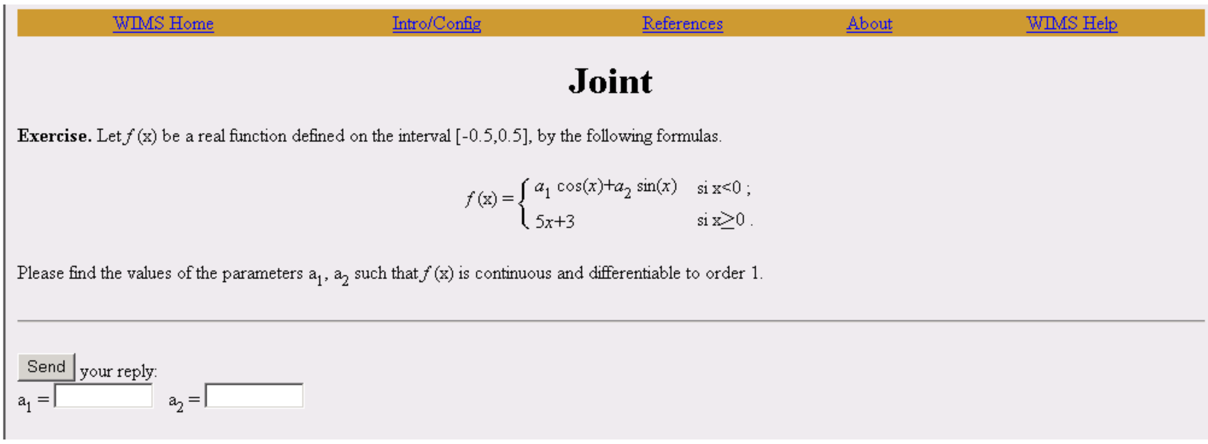
Alice répond correctement 3 fois sur 5. Les deux autres fois, elle confond « image » et « antécédent », reçoit un simple message d'erreur et rectifie au second essai : mais il suffit seulement dans cet environnement d'inverser les réponses ! Le même exercice se poursuit par 5 autres questions analogues à celle-ci.



Ce sont les mêmes questions que précédemment mais il y a cette fois-ci 6 champs à renseigner. L'activité attendue n'est pas la même qu'à la question précédente puisqu'il y a un mélange de tous les registres d'écriture, ce qui constitue une adaptation supplémentaire des connaissances sur image et antécédent. La stratégie qui consiste à répondre un peu au hasard et à rectifier éventuellement au second essai ne fonctionne plus car le logiciel ne signale pas l'emplacement des erreurs.

Alice comprend qu'elle ne peut plus se contenter de rectifier au deuxième essai si besoin est. Elle consulte donc son cahier de cours avant toute réponse et lit à mi-voix l'explication relative à « antécédent » et « image ». Elle répond alors correctement à la question. Elle refait cependant sa confusion à la 7ème et à la 8ème question, consulte à nouveau son cahier et corrige. Elle refait encore l'erreur à la 9ème question et décide à ce moment d'appeler le professeur. Il lui explique immédiatement. Elle fait la dernière question sans erreur. Plus tard, Alice réinvestit correctement ses connaissances sur image et antécédent dans le cadre graphique pour la résolution graphique d'équations fonctionnelles : elle fait à nouveau la confusion mais corrige en se relisant *(« Mais, c'est pas ça, j'ai fait l'antécédent !* »). L'hypothèse selon laquelle sa confusion a bien été corrigée peut être faite. L'apprentissage ne s'est cependant pas fait sur un cycle court de l'activité : la correction est longue et progressive. Il faut que la situation deviennent problématique pour Alice (elle n'a cherché à comprendre que quand il y a eu un mélange de plus de deux registres d'écritures, c'est-à-dire les 6 champs à remplir) et que le professeur intervienne rapidement et à bon escient. Il faut aussi qu'Alice prenne plusieurs initiatives, ce qui nous permet de qualifier cet apprentissage d'intentionnel (Pastré 2005).

Dans l'exemple suivant au début de l'université, les étudiants doivent travailler la continuité et la dérivabilité en un point x_0 d'une fonction définie par deux expressions différentes de part et d'autre de ce point. Il ne s'agit pas de travailler la perspective locale sur les fonctions. En effet, l'exercice se place dans le domaine de travail F2 : les fonctions proposées sont définies par des formules algébriques et la perspective locale est masquée par la procédure algébrique, comme en classe de terminale S. Cependant, cet exercice permet de dépasser les fonctions traditionnelles de la classe de terminale S. Dans l'exemple ci-dessous, la fonction proposée est trigonométrique sur R^- et affine sur R^+. Pour les étudiants de début de première année, la tâche n'est pas immédiate car il y a plusieurs sous-tâches à identifier et plusieurs connaissances à mettre en fonctionnement : d'une part écrire l'égalité des deux expressions en x_0 pour faire apparaître une première relation entre a_1 et a_2, d'autre part reconnaître que les deux expressions données sont de classe C^∞ sur R et qu'il suffit d'égaler la dérivée des deux expressions en x_0 pour obtenir une deuxième relation.



Les étudiants travaillent en autonomie pendant une séance de TD Wims où l'enseignant circule et fournit quelques aides aux étudiants trop en difficultés. Les relevés de trace d'activité montrent que tous les étudiants arrivent à réussir l'exercice, bien qu'il soit non immédiat. La bonne réussite peut être due aux aides de l'enseignant ou à la circulation de l'information entre étudiants.

Cependant, les relevés de traces d'activité mettent en évidence que le temps nécessaire à l'un des étudiants pour réaliser la tâche est relativement plus long que la moyenne observée chez les autres étudiants. Au contrôle écrit, il apparaît que cet étudiant n'a pas mis en fonctionnement les connaissances les plus pertinentes. Pour la continuité, il a calculé et égalé des limites en x_0 et pour la dérivabilité, il a calculé et égalé les taux d'accroissement en x_0 des deux expressions ; au lieu d'utiliser le caractère C^∞, ce dont le professeur ne s'était pas rendu compte pendant la séance de TD Wims.

Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle [-0.5, 0.5], par les formules suivantes.

$$f(x) = -5 \exp(-5x) \text{ si } x < 0$$

$$f(x) = a_1 + a_2\, x \text{ si } x \geq 0$$

Veuillez trouver les valeurs des paramètres a_1, a_2 pour que f soit continue et dérivable sur l'intervalle [-0.5,0.5].

Submit votre réponse :

$a_1 = \boxed{-5}$ $a_2 = \boxed{25}$

2

Explicitez ici vos calcul

$$\lim_{x \to 0^-} -5e^{-5x} = -5 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to 0^+} a_1 + a_2 x = -5 \Rightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$\frac{-5e^{-5x}+5}{x-0} = \frac{-5(e^{-5x}-1)}{x} = \frac{25(e^{-5x}-1)}{-5x} \quad \text{or} \quad \frac{e^{-5x}-1}{-5x} \xrightarrow[0]{} 1$$

$$\frac{a_1+a_2x-a_1}{x} = a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = 25}$$

On peut penser que cet exemple traduit à nouveau la difficulté de l'étudiant à adopter la perspective globale sur la fonction. N'adoptant pas une telle perspective, il ne peut pas utiliser la continuité et la dérivabilité globale des deux expressions algébriques à gauche et à droite de 0. Il se raccroche donc aux seules procédures disponibles pour lui pour étudier localement une fonction : le calcul des limites des deux expressions à gauche et à droite et le calcul des taux d'accroissements des deux expressions à gauche et à droite. Si cette méthode relève bien de l'aspect local des fonctions, l'absence d'articulation entre perspective globale et perspective locale prive l'étudiant de tout un pan de méthodes possibles dans une telle situation.

En fait, la rétroaction pour cet exercice Wims correspond à un changement de registre intéressant mais qui ne permet pas à l'étudiant à se corriger :

Exercise. Let f (x) be a real function defined on the interval [-0.5,0.5], by the following formulas.

$$f(x) = \begin{cases} a_1 \cos(x)+a_2 \sin(x) & \text{si } x<0 \,; \\ 5x+3 & \text{si } x\geq 0 \,. \end{cases}$$

Please find the values of the parameters a_1, a_2 such that f (x) is continuous and differentiable to order 1.

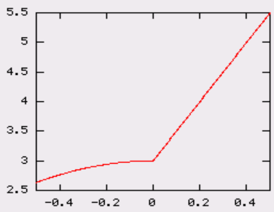
You have given the reply: $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, hence

$$f(x) = \begin{cases} 3\cos(x)+0\sin(x) & \text{si } x<0 \,; \\ 5x+3 & \text{si } x\geq 0 \,. \end{cases}$$

This reply is not correct. f (x) is continuous but it is not differentiable.

Your score: 5/10.

Graph of f (x) according to your reply :

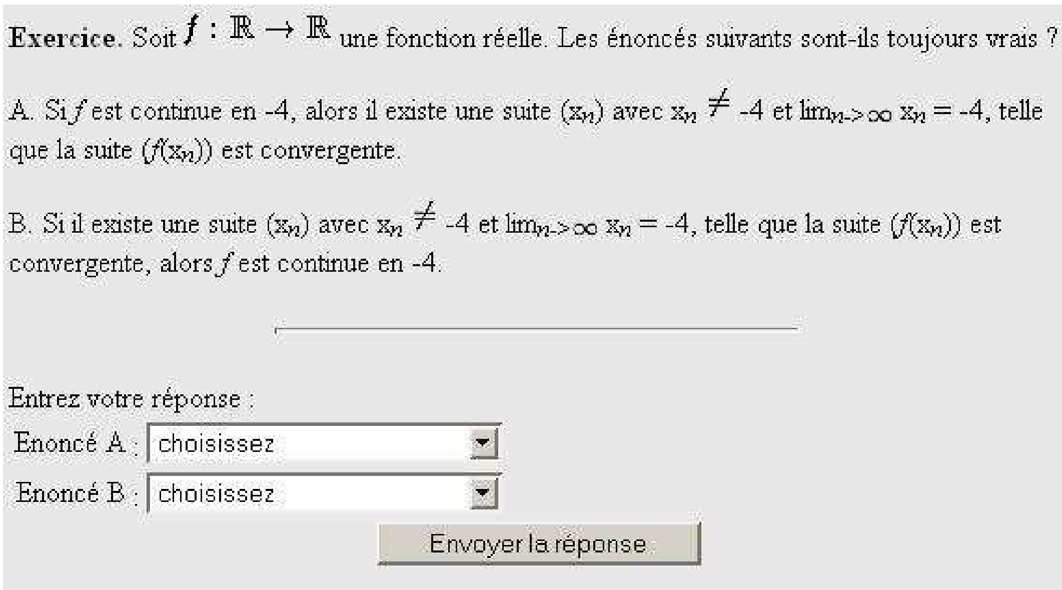


La rétroaction, ainsi que l’action de refaire l’exercice, ne permet pas à la connaissance experte de devenir disponible. Calculer des taux d’accroissement est gourmand en temps mais cela permet à l’étudiant de conclure. En ce sens refaire l’exercice plusieurs fois renforce l’étudiant en ce que la méthode utilisée est la meilleure. Nous avons cette fois repris le concept d’apprentissage incident (Pastré 2005) pour traduire les apprentissages dont l’élève n’est pas conscient comme dans cette situation. En fait, personne ne peut aider l’étudiant pendant son travail en autonomie si le professeur n’est pas présent. Un résultat correct n’est pas le signe que l’activité développée est bien celle qui était attendue. Lors d’une séance traditionnelle, la phase d’institutionnalisation ou plus simplement de correction permet aux élèves de mettre en regard leur activité avec ce que le professeur attendait. Cela met en évidence à nouveau les dangers d’un travail en totale autonomie sur des tâches qui dépassent les applications immédiates et l’importance du rôle du professeur, non seulement pour réguler l’activité pendant la phase d’autonomie mais aussi pour faire des bilans réguliers de ce qu’était l’activité attendue (aides constructives de l’enseignant).

2.c Des incursions dans le domaine de travail F3 à l’université et avec les bases d’exercices

Les derniers exemples que nous souhaitons donner de l’usage des bases d’exercices concernent l’aspect local des fonctions au début de l’université. Ils n’ont pas été publiés.

Comme nous l’avons mentionné dans le chapitre précédent, le premier résultat fondamental dans le domaine A3 est le lien entre suite convergente et fonction continue en un point. Ce résultat est énoncé en terminale S mais admis et utilisé comme une règle opératoire (selon les programmes en vigueur en 2011), qui plus est avec des fonctions continues globalement. L’exercice Wims proposé aux étudiants du début de L1 est un QCM permettant de mettre en fonctionnement ce résultat. A chaque exécution de l'exercice, deux énoncés sont proposés et l'étudiant doit se prononcer sur leur validité (Vrai/Faux). La forme des énoncés est aléatoire et de nombreuses propositions sont possibles (voir plus bas sur le brouillon de l'étudiant).



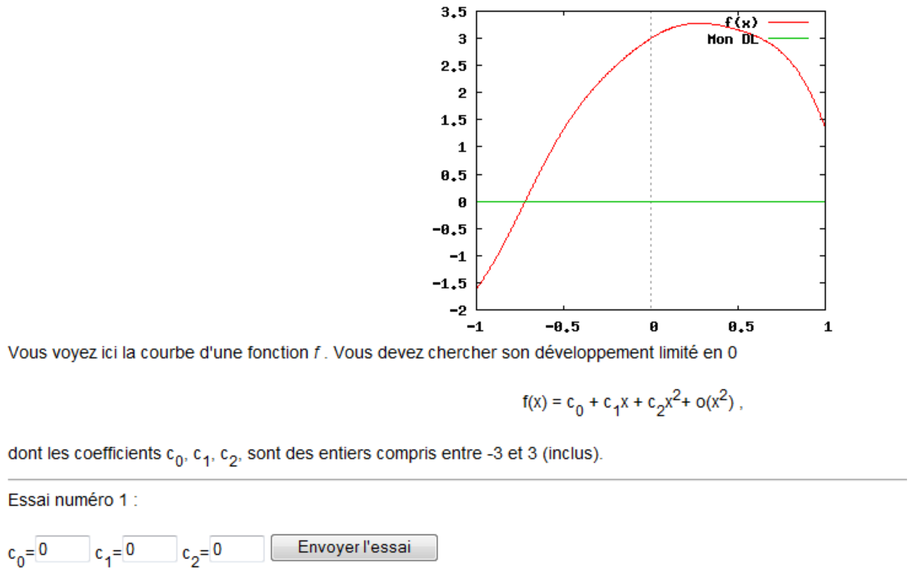
Pour les étudiants du début de première année, cet exercice ne peut pas être considéré comme une application immédiate du cours. En effet, le théorème est énoncé en cours sous sa forme classique : « (1) Une fonction f de R dans R est continue en l si et seulement si (2) pour toute suite numérique $(x_n)_N$ convergente vers l, la suite $(f(x_n))_N$ est convergente. Dans ce cas, sa limite est $f(l)$ ». Il y a en jeu dans l'exercice Wims non seulement le contenu mathématique du théorème mais aussi l'usage adéquat des quantificateurs et de la logique. Dans le cadre de nos travaux dans la CI2U, nous avons travaillé avec Durand-Guerrier (2006) sur cet énoncé précisément et la difficulté qu'il représente pour les étudiants compte tenu de leurs connaissances à l'entrée à l'université.

Ici des étudiants de première année d'université au Brésil, n'ayant pas reçu l'enseignement correspondant sur le lien entre suites convergentes et fonctions continues, ont réalisé sensiblement les mêmes performances que des étudiants de l'université d'Evry ayant reçu l'enseignement. Cela prouve à nouveau comment l'environnement QCM à deux choix multiples peut être détourné facilement par les étudiants mais cela confirme aussi la non pertinence de proposer un exercice qui n'est pas une application immédiate de connaissances disponibles chez les étudiants.

Le brouillon relevé d'un étudiant Français montre comment il travaille l'exercice : il relève les énoncés proposés par Wims et les réponses correspondantes afin de pouvoir répondre ensuite à coup sûr par comparaison avec ses relevés. Il y a lieu de penser que cette activité peut s'accompagner d'activité constructive pertinente pour l'apprentissage des mathématiques, par exemple si ces relevés sont l'occasion d'un travail explicite de classification des formes d'énoncés (regroupements par hypothèses initiales, tableaux à doubles entrées ou toute autre forme d'exploitation des énoncés…). Malheureusement le brouillon est très chronologique. L'étudiant ne reconnait pas l'énoncé dans sa forme directe (énoncé (5)). Il ne s'appui pas du tout sur ses premiers énoncés recopiés pour trouver la réponse attendue à certaines de leurs adaptations ; il ne porte pas une attention aux quantificateurs existentiels ou universels dans sa recopie - énoncés (4) et (6) pour lesquels la réponse est oui tous les deux. Enfin, il est même légitime de se demander s'il peut reconnaître deux énoncés de même forme quand les valeurs numériques sont différentes puisqu'il recopie des énoncés identiques - (7) et (10) par exemple.

1	Non . pas continue → $x_n \neq 3$ $\lim x_n = 3$ → diverge
2	oui . $x_n \neq 3$ $\lim x_n = 3$ → suite diverge → f pas continue.
3	Non . pas continue → convergente $\lim f(x) \neq f(\ )$
4	oui . convergente → $\lim f(x) \neq f(\ )$ → pas continue
5	oui . f continue → $\sqrt{}$ convergente ($x \neq 4$ et $\lim x_n = 4$) → $\lim f x = f(\ )$
6	oui . convergente → $\lim f(x_n) = f(\ )$ → continue
7	Non. $x_n \neq -6$ et $\lim x_n = -6$ → convergente → conti
8	Non $\lim x_n = -4$ → convergente avec $\lim f(x_n) = f(-4$ → continue en -4
9	Oui pas continue, $\lim x_n$ → diverge
10	Non $x_n \neq -1$ et $\lim x_n = -1$ → convergete avec $\lim f(x) = f$ → continue en -1
11	Non. pas continue en -1, $\lim x_n = -1$ / convergente mais $\lim f(x_n) \neq f(-1)$
12	oui $\lim x_n = -1$, convergente mais $\lim f(x_n) \neq f(-1)$ f pas continue en -1

Quelques exercices sont intéressants du point de vue de l'activité des étudiants pour travailler l'aspect local des fonctions de façon graphique et avec un apport de la technologie. C'est le cas de l'exemple suivant qui permet de développer une activité qui ne serait pas possible en environnement papier-crayon : ici l'élève doit en 10 ajustements à partir du tracé vert de ses propositions donner les trois premiers coefficients du développement limité de la fonction représentée en rouge. Pour que la recherche soit réaliste, les coefficients attendus sont des entiers compris entre -3 et 3. Le premier coefficient correspond à la valeur de la fonction en 0. Le second à la pente de la fonction en 0 que l'étudiant doit estimer graphiquement grâce à la graduation. Enfin le troisième coefficient est plus délicat à trouver intuitivement mais il est relié à la courbure de la courbe.



Nous n'avons pas de données recueillies sur l'activité d'étudiants sur cet exercice Wims. Nous avons préféré nous tourner vers les technologies ouvertes pour enrichir les domaines de travail F1 et F2 au lycée.

3. Les potentialités des technologies ouvertes pour l'Analyse

3.a Généralités sur les technologies ouvertes en lien avec la démarche expérimentale en mathématique

Nos recherches les plus récentes (Artigue, Vandebrouck, Cazes, Hérault, Marbeuf 2011, Lagrange, Artigue, Cazes, Gélis, Vandebrouck 2010) portent sur l'activité des élèves (leurs difficultés et leurs apprentissages compte tenu des tâches) avec des technologies ouvertes (Géogébra, le tableur et Casyopée). Elles sont plus directement tournées vers l'apprentissage des fonctions dans le cadre d'une démarche expérimentale[11], par opposition à la démarche adoptée avec les BEL qui s'avérait très traditionnelle et conformément aux programmes de

[11] Au sens des programmes d'enseignement du lycée

mathématiques actuels de l'enseignement secondaire. La question de savoir si les mathématiques possèdent une telle dimension expérimentale reste ouverte et d'actualité. Expérimenter en sciences, c'est vérifier « expérimentalement » des hypothèses émises pour en déduire des résultats reproductibles dans les mêmes conditions. Mais ce qui est attendu des élèves en mathématiques, c'est qu'ils sachent utiliser un outil technologique afin de résoudre un problème mathématique, dont le degré d'ouverture nécessite une activité plus ou moins autonome de problématisation, de modélisation sur l'outil informatique, d'investigation, d'observation, de conjecture et surtout de démonstration ou infirmation du résultat conjecturé. Ce n'est pas une mince affaire mais c'est à ce prix que les mathématiques enseignées ne sont pas dénaturées (Vandebrouck, Robert, De Hosson 2009).

La question de savoir si les technologies constituent ensuite un levier ou un obstacle à la réelle mise en œuvre de cette démarche dans les classes a été la question qui a animé nos recherches sur l'usage des technologies ouvertes dans les classes et elle reste un sujet actuel pour nos recherches en didactique des mathématiques dans le champ de l'Analyse (Gueudet et Vandebrouck 2011).

Les technologies ouvertes semblent potentiellement plus intéressantes que les BEL pour susciter l'activité mathématique des élèves et du coup leurs possibles apprentissages (activité constructive). En effet, outre qu'elles attisent l'intérêt comme peuvent le faire les BEL, elles sont porteuses d'un nouveau travail sur les représentations des fonctions et elles permettent d'élargir le champ des actions possibles des élèves. Nous avons vu plus haut que les tâches mathématiques étaient dans la plupart des BEL très proches des tâches classiques de l'environnement traditionnel. Les technologies ouvertes doivent donc permettre aux élèves des activités nouvelles qu'il ne leur serait pas possible de développer dans l'environnement traditionnel ou avec les BEL. Dans le champ de l'Analyse, l'introduction de la fonctionnalité de curseur dans Géogébra peut par exemple permettre des activités particulières liées aux notions de variable indépendante (ou de paramètre), comme dans les exemples qui seront développés plus bas. Ces activités, en particulier le pilotage d'un point d'une figure géométrique non pas directement mais par déplacement du curseur, peuvent favoriser l'activité de changement de cadre (géométrique vers fonctionnel) chez les élèves. Dans l'environnement tableur, les notions algébriques comme celles de variable, formule, paramètre, suite et récurrence sont aussi sous jacentes à des manipulations tableur et peuvent favoriser le passage du cadre numérique au cadre algébrique (Haspekian 2008). Dans une moindre mesure, il s'agit d'une idée analogue à celle qui a dominé lors de la création de la géométrie dynamique : ces logiciels s'étant développés sur la distinction dessin / figure et sur l'idée que la fonctionnalité de déplacement devait permettre un nouveau rapport des élèves à cette distinction.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue les limites des technologies, qui affectent l'activité constructive et la manière dont les élèves peuvent conceptualiser avec elles des notions mathématiques. Les travaux d'Artigue, Lagrange sur les CAS ou plus récemment d'Haspekian sur le tableur dans le passage entre arithmétique et algèbre ont bien mis en évidence ces difficultés dans le cadre de l'approche instrumentale. Dans le champ de l'Analyse, le fait que les technologies ne donnent à voir la droite numérique qu'à travers des nombres décimaux renforce sûrement les perspectives ponctuelles sur les fonctions et constitue peut-être un obstacle pour l'adoption de la perspective locale : comment un élève peut-il émettre des conjectures raisonnables qui concernent des propriétés locales – ou même des propriétés ponctuelles en des valeurs irrationnelles - s'il ne connaît pas déjà les limites de la technologie – c'est-à-dire s'il n'est pas déjà sensibilisé à la complétude de R ? Cela soulève le délicat problème des prises en main que nécessitent ces outils, associant nécessairement des fonctionnalités technologiques avec des connaissances mathématiques. L'intégration de l'outil ne peut donc se faire sans une prise en main progressive de la part des élèves, organisée par l'enseignant dans son scénario et les tâches proposées. C'est ici que la question des genèses instrumentales est sous jacente à nos travaux, même si nous l'abordons en termes de dialectique entre activité productive et activité constructive.

Dans le cadre d'une démarche expérimentale en mathématiques, nous nous attendons, non seulement à ce que l'activité potentielle des élèves soit nouvelle, mais aussi qu'elle soit enrichie par rapport à une démarche plus traditionnelle reposant sur des exercices classiques. Enrichie peut faire référence à la mise en fonctionnement par les élèves de connaissances mathématiques non indiquées - qui doivent donc être disponibles ou le devenir - ce qui participe de leurs apprentissages. Cela peut impliquer aussi des mises en fonctionnement de connaissances qui dépassent les applications immédiates auxquelles se ramènent souvent beaucoup d'exercices traditionnels, que ce soit par les textes découpés et détaillés des énoncés ou par les aides nombreuses des enseignants au cours des déroulements des séances, dès le début des recherches des élèves en particulier. Autrement dit, la démarche expérimentale peut être l'occasion pour les élèves de mettre en fonctionnement des connaissances non nécessairement explicitées (devant être disponibles) et non réduites à des applications immédiates de ces connaissances : il s'agit de problématiser, de modéliser, de conjecturer, de prouver, et d'adapter les connaissances récentes et anciennes à l'occasion de ces activités.

L'intégration des technologies ouvertes au sein de cette démarche expérimentale est une occasion supplémentaire d'enrichir l'activité des élèves. Par sa valence productive, l'outil qui donne à voir des phénomènes nombreux doit d'une part faciliter l'activité de conjecture, plus facilement qu'en environnement papier-crayon ; d'autre part, il doit encourager l'élève à entrer dans la démonstration, ce qui lui demande à nouveau de nombreuses adaptations de connaissances, comme des introductions d'étapes intermédiaires, des choix de méthodes ou encore des mélanges de cadres, registres, points de vue.

3.b L'enrichissement du domaine de travail F1 au lycée par les modélisations fonctionnelles de situations géométriques

Nous avons contribué au niveau des classes de seconde (Artigue, Vandebrouck, Cazes, Hérault, Marbeuf 2011) et de première S (Lagrange, Artigue, Cazes, Gélis, Vandebrouck 2010) à produire des familles de situations mettant en jeu les fonctions dans des modélisations géométriques. Ces situations visent à enrichir l'activité sur les fonctions dans ces classes. Les fonctions abordées peuvent l'être à travers le cadre géométrique et l'accent n'est pas essentiellement mis sur les représentations algébriques des fonctions.

Reprenant nos travaux sur les débuts de l'Analyse du lycée à l'université, nous considérons que le travail dans le cadre fonctionnel nécessite de dépasser celui dans le cadre algébrique. En effet, le cadre algébrique est celui de la manipulation de lettres comme nombres généralisés (inconnues et paramètres) dans des formules. Ce cadre est caractérisé par l'établissement d'équations, d'inéquations et par la détermination des inconnues. Les travaux de Kieran (2007) ou de Kieran et Drijvers (2006) portent sur le travail des élèves dans ce cadre. Le cadre fonctionnel est caractérisé par la manipulation de fonctions, de variables indépendantes et dépendantes, des covariations (limitées aux covariations continues). Autrement dit, le cadre fonctionnel intervient lorsqu'au-delà de la formule algébrique et de sa dépendance en *x*, l'élève doit penser en termes de covariations. A ce niveau, des travaux existent également : Arzarello & Robutti (2004), Falcade, Laborde et Mariotti (2007), Lagrange et Gélis 2008, Lagrange et Gélis (2008), Lagrange et Artigue (2009), Gélis (2009), Krysinska, Mercier et Schneider (2009).

Dans le cadre fonctionnel, la perspective globale ainsi que les nouvelles représentations globales comme la courbe et le tableau de variation deviennent fondamentales et doivent être manipulées aussi bien comme outil que comme objet. Cela exige des élèves de dépasser la perspective ponctuelle qui peut être favorisée par les représentations algébriques et d'adopter la perspective globale sur les représentations algébriques manipulées, pour les relier à des propriétés globales des fonctions (croissance, parité, périodicité, extremums globaux…). En conséquence, nous ne situons pas seulement comme Gélis (2009) la notion de fonction « *en relative continuité avec l'algèbre* ». En particulier, adopter la perspective globale sur une représentation algébrique manipulée va au-delà d'activités algébriques au niveau global / méta de Kieran (2007) : « *The generational activities of algebra involve the forming of the expressions and equations that are the objects of algebra (...). The transformational (rule-based) activities include, for instance, collecting like terms, factoring, expanding, substituting (…) The global / meta-level mathematical activities include problem* *solving, modelling, noting structure, studying change, justifying, proving, and predicting* ». Nous ne nous situons pas non plus en continuité avec les récents travaux de Krysinska, Mercier et Schneider (2009), qui travaillent sur des suites de nombres pour l'émergence de modèles fonctionnels « ponctuels » chez les élèves, même si leur travaux soulèvent des questions que nous ne prenons pas du tout en charge ici (les rapports entre la variable indépendante et le temps par exemple).

Rappelons que Tall (2004) modélise l'évolution cognitive dans cette pensée fonctionnelle en caractérisant trois « mondes » : un premier monde « incorporé conceptuel » fait d'expériences sensorimotrices des grandeurs et de la covariation (il introduit le registre énactif des fonctions qui évoque des représentations fondées sur des interactions avec l'environnement par des gestes et des actions), un second monde « symbolique - proceptuel » où les représentations (algébriques et graphiques notamment) permettent les manipulations aux niveaux processus et objets des fonctions puis un troisième monde « formel axiomatique » où les objets sont assujettis à des définitions et les propriétés déduites via des preuves formelles. Pihoue (1997) utilise quant à lui trois indices dans les actions des élèves pouvant indiquer l'existence d'une phase de transition vers un mode de pensée fonctionnelle : la perception des variations avec des indicateurs de discours du type « toujours » ou « tout le temps » ; l'isolement de la variable indépendante (même si elle n'a pas officiellement ce statut) et la subordination des autres variables à celle-ci ; l'intériorisation d'un algorithme de calcul avec l'explicitation des différents pas menant de la variable indépendante à la variable dépendante.

Les indices définis par Pihoue portent sur les objets du monde « incorporé conceptuel » tandis que notre caractérisation entre terme de perspective globale pour interpréter les représentations de fonctions porte plutôt sur le monde « symbolique proceptuel ». Ceci en fait des outils complémentaires. Rappelons que nous avons relié l'aptitude des élèves à adopter la perspective globale sur les fonctions à l'approche coordonnée des fonctions, caractéristique finalement de la pensée fonctionnelle dans le monde symbolique proceptuel de Tall.

Rappelons enfin que Piaget et Garcia (1989) enrichissent quant à eux le stade « Schéma » de la théorie de Dubinsky (1991) en définissant trois niveaux de Schéma : au niveau intra, l'élève ou l'étudiant considère les fonctions comme des objets isolés et se concentre sur les processus dans lesquels ils sont engagés. Au niveau inter, il commence à faire des connexions entre objets fonctionnels de même nature, à donner sens à l'idée de transformation engageant ces fonctions. Au niveau Trans enfin, il peut considérer des systèmes de transformations et les structures qui en émergent. Certains auteurs parlent de pensée fonctionnelle avancée dans le monde symbolique – proceptuel de Tall ou à partir du stade Inter de Piaget et Garcia.

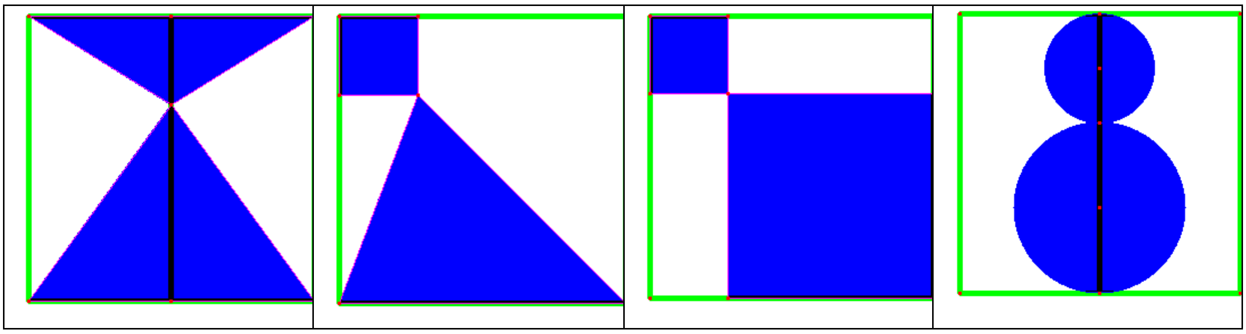
Deux types d'expérimentations ont été menés avec les élèves de seconde et première S sur les modélisations de situations géométriques. La première avec Géogébra sur une situation d'enseignes (projet Comenius, Artigue, Vandebrouck, Cazes, Hérault, Marbeuf 2011), la seconde plus sophistiquée avec le logiciel Casyopée sur une situation de rectangle inscrit dans un triangle (projet Remath, Lagrange, Artigue, Cazes, Gélis, Vandebrouck 2010).

Dans la première expérimentation en classe de seconde (poster cerme), les élèves sont supposés entrer dans le premier monde de la pensée fonctionnelle défini par Tall (2004), en étudiant grâce au logiciel GéoGébra une covariation dans le registre numérique (covariation de mesures) en lien avec la covariation dans le cadre géométrique. Les recherches rejoignent celles proposées par Falcade et al. (2007) avec Cabri Géomètre ou celles d'Arzarello et Robutti (2004) pour des situations dépendantes du temps. Les questions qui sont posées aux élèves portent ici sur des extremums globaux de fonctions du second degré, ce qui doit obliger, dès les explorations dans le cadre géométrique et le registre numérique (activité productive liée à la manipulation continue du curseur), à adopter la perspective globale caractéristique de la pensée fonctionnelle (activité constructive).

La deuxième expérimentation au début de la classe de première S (séminaire national Remath) est plus tournée vers le deuxième monde de la pensée fonctionnelle (pensée fonctionnelle avancée). Il y a une introduction de paramètres et l'activité attendue porte plus directement sur les traitements et les conversions entre représentations des fonctions (procepts). L'enjeu d'apprentissage (activité constructive) est donc plus ici que les élèves adoptent une approche coordonnée des fonctions, en lien avec le cadre géométrique (articulation entre le premier et le second monde de Tall). Il y a à nouveau une nécessité d'adopter la perspective globale sur les représentations fournies par Casyopée car les questions portent encore sur des extrema globaux de fonctions. En effet, Casyopée permet spécifiquement de faire un pont entre les deux mondes de Tall, par l'expérimentation possible de la covariation entre mesures et l'accès facilité aux différentes représentations fonctionnelles (procepts). Il y aussi une volonté avec cette deuxième expérimentation de commencer à travailler le niveau « Inter » du stade Schéma de Dubinsky : que l'élève commence à faire des connexions entre objets fonctionnels de même nature (ici des fonctions du second degré, paramétrées et correspondantes à une même famille de situations géométriques).

i) le projet Comenius, l'entrée dans la « pensée fonctionnelle »

La première famille de situations introduite en seconde est dénommée « famille d'enseignes » : une forme géométrique initiale est donnée (carré, rectangle, cercle…) et un point variable sur cette forme (sur un côté, un diamètre…) permet la division de la forme en différentes surfaces représentant des enseignes et dont les aires dépendent du point variable (Artigue, Vandebrouck, Cazes, Hérault, Marbeuf, 2011).



Plusieurs questions peuvent alors être posées aux élèves concernant dans un premier temps les valeurs des aires définies par l'enseigne (travail de la perspective ponctuelle sur les fonctions) puis dans un second temps les variations des aires définies par l'enseigne (problèmes de maximums, de minimums, travail de la perspective globale).

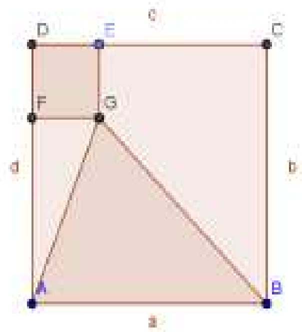
Les fonctions qui émergent des différentes enseignes sont des fonctions de degré 2, ce qui correspond à l'un des types de fonctions que doivent rencontrer les élèves de la classe de seconde. Dans le travail ponctuel, les élèves peuvent simplement passer d'une activité dans le cadre géométrique (construction de la figure) à une activité dans le cadre algébrique (résoudre des équations algébriques). La nécessité d'utiliser des fonctions ne s'y fait pas sentir. Cependant, dans le travail de la perspective globale, introduire des fonctions et travailler dans le cadre fonctionnel semble nécessaire pour étudier les variations des aires. L'intérêt de cette famille de situations est qu'elle peut-être déclinée de plusieurs façons possibles avec les élèves. Les élèves peuvent explorer numériquement les enseignes et conjecturer les positions du point variable pour avoir l'égalité ou l'extrema demandé. Le passage délicat, comme dans toute démarche expérimentale avec les élèves, reste le passage de la phase de conjecture à la phase de démonstration.

Le logiciel Géogébra permet d'expérimenter la covariation par l'accès à une représentation graphique du phénomène étudié. En effet, il est possible de tracer la représentation graphique de la fonction étudiée directement à partir de la situation géométrique (sans passer par l'explicitation algébrique de la fonction). La courbe est définie comme un lieu de point. Cela ne met pas en avant l'expression algébrique comme représentation prédominante des fonctions numériques et donne à voir à nouveau l'aspect global de la fonction.

Dans l'exemple particulier que nous développons, les élèves doivent étudier le minimum de la somme des aires grisées (l'aire du carré plus l'aire du triangle) en fonction de la position du point E. La feuille de TP est la suivante :

L'enseigne

L'enseigne d'un magasin est constituée d'un carré Dans celui-ci, un autre carré et un triangle sont éclairés (voir la figure ci-contre) .
La surface éclairée est constituée du carré DEGF et du triangle GBA
La dépense d'électricité est proportionnelle à la surface éclairée.
ABCD est un carré. DEGF également.
Le point E est mobile sur le segment [DC]



<u>Où doit-on placer le point E pour que la dépense en électricité soit minimale ?</u>

Première partie : construction de l'enseigne

Pour cette construction, on prendra A de coordonnées (0, 0) et le segment [AB] de longueur 4.
Détaillez l'ordre de vos constructions.

Deuxième partie : élaboration de la conjecture

1. Pour quelle position du point E la dépense semble –t- elle minimale ?

2. Quelles fonctionnalités du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ?

Troisième partie : Démonstrations

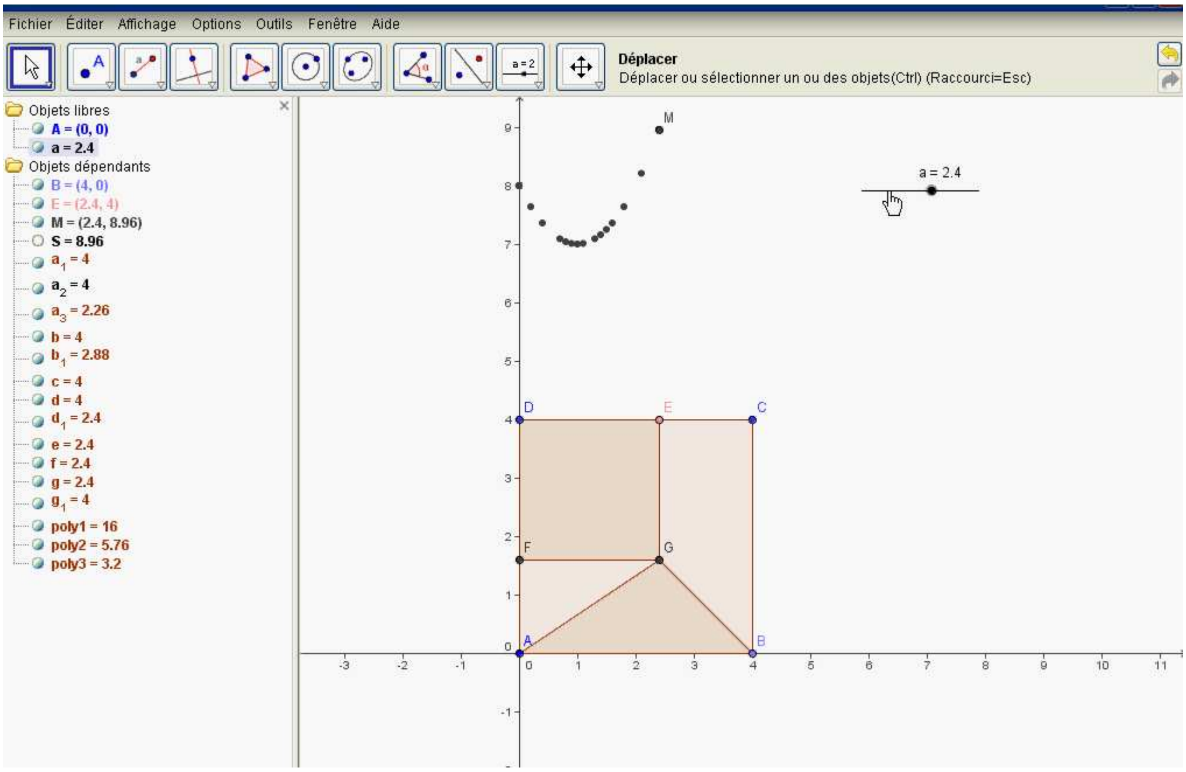
1. On pose DE = x. Exprimer en fonction de x la somme des aires du carré EDFG et du triangle GAB.

2. En déduire la position du point E répondant au problème.

La première partie concerne la construction de la figure. Les élèves ont déjà manipulé le logiciel Géogébra et ils sont habitués à introduire des curseurs pour créer des points variables. De fait, tous les élèves créent un curseur *a* comme ci-dessous qui permet de piloter le point E sur le segment [D,C]. Comme nous l'avons déjà signalé plus haut, le passage par le curseur est un intermédiaire qui est supposé favoriser l'activité de changement de cadre chez les élèves mais il n'est nullement un passage obligé dans ce genre de modélisation.

Le logiciel actualise la valeur numérique des aires de FGED et ABG en temps réel en fonction de la valeur de *a*, et donc en fonction de la position de E. Dans la première question de la deuxième partie, les élèves doivent conjecturer numériquement en déplaçant le curseur la valeur de *a* pour laquelle la somme des aires semble minimale. Pour cela, ils doivent redéfinir FGED et ABG comme deux polygones, faire afficher leurs aires respectives (*poly1* et *poly2*) et la somme des ces deux aires (*poly3*). Il reste un travail de lecture numérique de la co variation entre *a* et de *poly3*. Le déplacement manuel du curseur met en outre l'accent sur la variable indépendante dont dépend l'aire que l'on cherche à maximiser. En d'autres termes, l'activité productive de déplacement du curseur est supposée permettre aux élèves d'entrer dans la pensée fonctionnelle (activité constructive).

Dans la question 2, les élèves doivent créer comme ci-dessous un point M dépendant, dont l'abscisse est *a* et dont l'ordonnée est la somme numérique des deux aires *poly3*.



Une courbe apparaît et permet aux élèves de conforter graphiquement la valeur de *a* cherchée ainsi que la valeur du minimum. Même si le fait de disposer dans une même fenêtre du cadre géométrique et du registre graphique, ou bien le fait de voir la courbe apparaitre comme une juxtaposition de points peut questionner, il s'agit à nouveau de travailler la perspective globale de la fonction en jeu (dans le registre graphique cette fois). C'est une nouvelle occasion pour penser la situation géométrique en termes de covariation et pour entrer dans la pensée fonctionnelle (dialectique productif / constructif).

Le travail de démonstration de la conjecture fait l'objet de la partie 3. Les élèves travaillent dans le cadre fonctionnel (registre numérique ou registre graphique) mais la preuve ne peut se faire que dans le registre algébrique.

L'expérimentation de la covariation (numérique ou graphique) par pilotage du curseur doit favoriser, plus facilement que dans l'environnement traditionnel, l'introduction de la variable x indépendante correspondante au curseur et la variable dépendante, à savoir l'aire du carré en fonction de x (x^2) plus l'aire du triangle en fonction de x ($4(4-x)/2$). Dans cette création des formules algébriques, les connaissances anciennes sur les aires algébriques, c'est-à-dire calculées en fonction d'une variable x sont supposées disponibles. Il s'agit de l'activité générationnelle algébrique par référence à Kieran (2007) ou l'activité de formation dans le registre algébrique par référence à Duval (1991).

Il reste le travail purement algébrique sur l'expression $x^2+ 4(4-x)/2 = x^2-2x+8$. En seconde, les élèves doivent passer par la forme canonique $(x-1)^2+7$ de cette expression, pour retrouver la valeur du minimum et la valeur de la variable pour laquelle ce minimum est atteint. Il s'agit ici de l'activité transformationnelle (Kieran 2007) ou de traitement de la représentation (Duval 1991). Ici (et c'est cohérent avec le programme de la classe de seconde), interpréter la forme canonique pour en extraire la valeur du minimum et la valeur de x où il est atteint nécessite pour les élèves d'adopter la perspective globale à partir de la formule. Ceci est pour nous caractéristique de la pensée fonctionnelle et dépasse comme nous l'avons signalé plus haut le niveau de pensée algébrique Global / Méta de Kieran (2007). Les résultats algébriques doivent être cohérents avec la conjecture graphique. En classe de terminale, le travail portera sur des enseignes où les valeurs attendues ne sont pas entières ou décimales (paragraphe 3c).

Les observations dans le projet Comenius de deux binômes d'élèves Aurélien/Arnaud et Lolita/Fara mettent en évidence les différentes difficultés des élèves dans le changement de cadre géométrique / fonctionnel et l'entrée dans le pensée fonctionnelle. Aurélien et Arnaud sont assez faibles tandis que Lolita et Fara sont de bonnes élèves.

La première difficulté récurrente est la difficulté pour beaucoup d'élèves à piloter spontanément le point E à partir du curseur *a* et non directement par action sur le point E comme en géométrie dynamique classique. Chez la plupart des binômes de la classe, cette difficulté est très vite surmontée par les élèves. Piloter le point E directement est un réflexe mais la majorité des élèves comprend très vite que le point E ayant été défini via le curseur, il se pilote via le curseur.

Cependant, Aurélien et Arnaud ont des difficultés en amont pour articuler la création d'un point E sur le segment avec la création du curseur *a* (appelé *j* par les élèves ici). L'aide du professeur est très procédurale car l'objectif du TP n'est pas à ce niveau : « vous allez en saisie… E d'accord. Égal » puis un effet Topaze au moment où le professeur veut que l'élève dise *j* : « ben justement comment tu l'as appelé ton curseur ? ».

Madame ? Oui. *On a besoin d'aide pour le curseur aussi.* D'accord. L'aide pour le curseur Déjà pour avez la place du curseur. *Oui.* Il est juste là ? *Oui on l'a mis.* D'accord vous avez fait le curseur entre combien et combien ? *0 – 4* Voilà. Après ? Ca c'est le nombre. *Oui.* Donc maintenant vous voulez créer le point. *Oui ici.* Alors ce point, **vous allez en saisie**, il s'appelle comment ? Je veux qu'il s'appelle comment ce point ? *E !* **E d'accord. Égal**. D'accord. Quelle va être son abscisse ? *0 – 4 !* Ben une abscisse 0 4 c'est difficile ! Justement qu'est ce que t'as appelé…**ben justement comment tu l'as appelé ton curseur ?** *j !* j ? *Oui oui !* OK ! Et son ordonnée ? *Quatre !* Voilà ! Et bien vérifie si ça marche bien. Voilà. Maintenant fait varier avec le pointeur. Vois si c'est bon.

On peut donc penser que le premier pas dans la pensée fonctionnelle, le changement de cadre possible a priori grâce à cette introduction du curseur dans le problème géométrique, n'est pas réalisée à ce moment par ces deux élèves en autonomie. L'introduction du curseur reste pour eux artificielle et source de difficultés. La prise en main de cette fonctionnalité associée à la notion de variable (genèse instrumentale) est peut-être en cours mais n'est pas achevée.

Les élèves ont ensuite des difficultés pour faire la conjecture numérique. En effet, ils n'ont pas demandé l'affichage de la somme des aires du carré et du triangle et ils calculent les sommes de tête. Ceci amène l'un des élèves à penser que la somme est constante égale à 8. Le second élève doute « *mais non mais on sait pas parce que t'as pas fait aire plus aire* ». Cependant, les interactions mettent en évidence des termes du discours relatif à l'expérience de la covariation : « tout le temps », « toujours » mais aussi l'utilisation du verbe « aller » traduisant le mouvement et l'utilisation explicite du verbe « varier ». Les interactions, d'abord entre élèves puis avec le professeur, permettent ainsi d'arriver à la bonne conjecture.

Regarde ***c'est tout le temps*** *8 !* ***Tout le temps*** *vas y fais le* ***varier****…   oui donc c'est ça, tu fais poly 1 + poly 2 tu fais par exemple attends…* Vous m'avez trouvé un minimum ? *Non, mais heu pour faire… Ben disons que moi j'ai déplacé plusieurs fois le curseur… et à chaque fois j'tombe sur 8…pour la somme des aires / mais non mais on sait pas parce que t'as pas fait aire plus aire…* Ben faut peut-être faire, elle est où votre aire déjà ? *Ben là et là…* Oui d'accord mais… vous faites la somme à chaque fois à la main ? *Oui de tête* ! Ben vous pouvez utiliser la machine… *Non mais j'ai fait i est égal à poly1 plus poly 2 mais ça a tout / oui / effacé…* comment ça i ? Ben parce que i tu l'as déjà donné… donc appelles le s… *Mais y'a pas de i… c'est un i ça* ? s égal, voilà… c'est un grand S pourquoi t'as un grand S, un petit ce serait mieux enfin c'est pas grave c'est pas grave c'est pas grave, aller… D'accord…entrer… entrer / et bien voilà / S égal 7,16… OK donc maintenant vous faites varier quoi… voilà, donc est ce que… plutôt dans l'autre sens vas y… ah ? Faut aller plus doucement / *Faut* ***aller*** *à 7…* Oui, voilà… *C'est déjà au minimum en fait…*

Aurélien et Arnaud ayant perdu du temps sur leur construction et leur conjecture numérique, ils ne passent pas par le registre graphique (partie 2, question 2) et doivent directement faire la démonstration. Cela ne pose par de problème pour eux de passer de la conjecture numérique à la phase de démonstration algébrique (partie 3 de l'énoncé). Le fait de démontrer dans le registre algébrique a sans doute été routinisé dans l'environnement papier-crayon par les élèves. Les élèves suivent aussi peut-être méthodiquement leur feuille de TP. Mais l'introduction de la variable *x* reste artificielle et difficile pour les élèves. La difficulté est là. Pour ces élèves faibles, elle semble plutôt liée à l'entrée dans la pensée algébrique et l'activité générationnelle (ou la formation de la représentation). En effet, les élèves éprouvent des difficultés à penser *x* comme une inconnue et non pas une valeur numérique particulière. Ils voudraient au départ implémenter directement *DE=x* dans la ligne de saisie du logiciel. Comme il apparaît dans la discussion, les rétroactions (fonctionnelles) du logiciel ne permettent pas aux élèves de surmonter la difficulté et le statut de la notation *x*.

Bon après alors… on pose ***DE est égal à x****…donc il faut tracer DE déjà…* / qu'est ce que vous avez fait pour vérifier la conjecture ? / *L'addition des aires* / Et vous avez déplacé c'est ça ? / *Oui* *Tracer DE tu dis… oui tracer DE tu traces et après faudra que tu mettes en bas* ***DE est égal à x*** *ce que j'ai mis déjà mais… A la place de DE faudrait peut être mettre le nom du segment, non… ben non parce qu'il sera égal à x. OK* *équation invalide, tu vois... Ah, j'avais raison…*

Les élèves restent donc en difficulté et ont besoin du professeur pour comprendre qu'il faut travailler dans l'environnement papier-crayon. Il reste encore des difficultés profondes liées à la dépendance et non pas à la variation. L'expression « *en fonction de* » ne traduit plus l'idée de covariation mais doit plutôt se comprendre comme « *dépend de* ». Les élèves travaillent sur la figure lorsque le point E est en (1,4). Alors le triangle dont la base mesure toujours 4 a une hauteur de 3. L'un des deux élèves pense que « dépendre de *x* » signifie qu'il faut rajouter *x* après les valeurs numériques. Il reste très accroché à la figure « *Oui mais là en l'occurrence* ». Il y a peut-être même une ambiguïté pour cet élève dans la mesure où il accepte que le côté du carré soit *x*. N'est ce pas *x* car sur la figure affichée, le côté du carré vaut 1 (et donc $1x = x$) ? A nouveau le second élève doute mais l'interaction entre les deux élèves et le logiciel (« *Regardes, là c'est plus 3x là…* ») ne leur permet pas de trouver la bonne formule algébrique pour l'aire du triangle.

Ici 4x */ Base fois hauteur… Donc la base c'est 4… /* ***4x*** *…* ***c'est 4 fois x… parce que c'est en fonction de x*** */ Ah ? La hauteur ? /* ***Ben la hauteur… 3x*** */ Non ça peut changer /* ***Oui mais là en l'occurrence*** */ Regardes, là c'est plus 3x là… /* ***Mmm … ben écoutes…*** */ Déjà pour le carré on a trouvé parce x carré ce sera toujours l'aire du machin… c'est pas plus compliqué que ça… la base ce sera toujours 4 / non, c'est pas beaucoup plus compliqué mais… /* ***la base elle changera pas / c'est 4x fois*** */ oui la base elle change pas, ça c'est déjà quelque chose…/ la base elle changera pas / Oui ça c'est sûr / Mais après il faut trouver la hauteur… / comment elle s'exprime en fonction de x...*

C'est le professeur qui vient les aider à nouveau. Le premier élève pense toujours que la base du triangle est 4*x* car les aires dépendent de *x*.

Ici la longueur EG elle fait combien ? *x !* x ! La longueur totale là. *4 /* ***4x !*** 4x ou 4 ? ***4x*** */ ben 4* Le carré c'est un carré de côté quoi ? *4 / ben 4* D'accord donc cette longueur totale elle fait combien ? *4 / 4* Et celle-ci fait ? *x !* Et moi je veux ? *Celle là…* La hauteur du triangle ! *Oui* Ben à vous ! *Ah… / 4-x* …. peut-être… *Oh punaise !*

Finalement, les deux élèves faibles semblaient entrer dans la pensée fonctionnelle au moment de leur exploration numérique (usage de termes spécifiques dans le discours, premier monde de Tall). Il est regrettable qu'ils n'aient pas pu expérimenter graphiquement. Leurs difficultés générationnelle algébriques ont été un obstacle qui les a détournés de l'objectif visé pour le TP.

L'autre exemple concerne les élèves Lolita et Fara, qui sont cette fois de bonnes élèves. Bien des difficultés observées au moment du passage à l'algèbre chez le binôme d'élèves faibles n'existent plus. Cependant, de nouvelles difficultés apparaissent, plus fines. Les élèves ont tout d'abord bien réalisé leur figure, bien expérimenté numériquement la covariation et bien conjecturé numériquement la valeur du minimum. Mais elles ne comprennent pas la question « Quelle fonctionnalité du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ? ».

Quelle fonctionnalité du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ? Oui, on met que Ca veut dire en gros qu'est ce qu'on peut utiliser. Ah, au pluriel ? Oui. Ca veut dire en gros qu'est ce qu'on peut utiliser pour confirmer que c'est ce qu'on a dit c'est bien ça quoi. Oui, pour confirmer que quand E c'est (1,4) et bien c'est là que la truc d'électricité c'est minimale. Ben on a fait les sommes donc c'est ça quoi. Mais à mon avis y'a un p'tit truc tu vois... C'est pas là dedans... C'est pas là dedans... AIRES ! Oui, mais ça avancera à rien. A mon avis, tu vois, comme on n'avait pas lu les questions avant et bien... En fait, c'est avec les sommes. Enfin, j'sais pas, je pense...

Les élèves concluent qu'elles ont été trop vite par rapport aux questions de la feuille de TP et donc que cette question est sans objet. Consciencieuses, elles appellent tout de même le professeur. L'objet de l'aide du professeur est de faire émerger à l'occasion de cette deuxième question la fonctionnalité de trace sur GéoGébra, et par ce biais le concept de fonction comme outil pour prouver le résultat conjecturé numériquement.

Pour la question 2 quelle fonctionnalité du logiciel peut-on utiliser pour conforter cette conjecture ? Oui / Ben on met que c'est le fait de faire d'avoir fait les sommes ? Ou y'a un autre truc encore ? Un autre truc… c'est une fonctionnalité, voilà, je cherche quelque chose qui on a déjà utilisé dans le logiciel */ ah on l'a déjà utilisé dans le logiciel ? /* Mais ça c'est les aires ça c'est pour faire ton calcul donc t'as déjà trouvé quoi au fait comme minimum ? *E c'est (1,4) / (1,4) oui /* d'accord */ coordonnées (1,4) /* Bon OK donc qu'est que tu voudrais quand on demande un minimum. **Trouvez-moi quelque chose qu'on a déjà utilisé dans le cours, ou… je sais pas, qui fait apparaître un minimum**… Parce que là ce que vous m'expliquez vous, vous avez déplacé votre curseur, vous avez regardé */ s /* s la somme et puis manuellement vous avez vu tiens c'est minimum à 7, OK…

Finalement l'intervention du professeur se situe au niveau procédural. Le professeur donne les instructions aux élèves afin de construire le point M. Mais lorsque la courbe apparaît à l'écran, les élèves mettent spontanément en relation la forme de la trace avec les variations numériques et elles confirment leur conjecture graphiquement. Cette reconnaissance (aspect global et mise en relation des registres numériques et graphiques) traduit pour nous une entrée dans une pensée fonctionnelle, à ce moment là de l'exercice.

Cependant, elles ont des difficultés à reconnaître spécifiquement la représentation graphique de la fonction qu'elles manipulent déjà numériquement. A l'occasion du tracé (aidé par l'enseignant), les élèves relèvent que « *ce n'est pas une courbe* » « *les minimums et les maximums, on a vu quand on a fait les courbes … Donc excuses moi mais…* ». Nous relions cette difficulté au fait qu'avec GéoGébra dans sa version actuelle, les élèves représentent la figure (cadre géométrique) et la trace de la covariation (représentation graphique dans le cadre fonctionnel) dans la même fenêtre. La courbe ne peut donc pas facilement acquérir un statut dans le cadre fonctionnel.

En outre, si l'exploration numérique n'était pas acceptée par les Lolita et Fara comme une preuve mathématique pour la valeur du minimum, l'exploration graphique de la courbe semble par contre bien acceptée. La difficulté n'est donc pas dans l'accès à la pensée fonctionnelle mais plutôt dans le statut des différents registres dans le deuxième monde de Tall : pour elles, l'exploration graphique de la fonction permet de prouver la conjecture. Ici l'exploration numérique puis graphique de la covariation semble avoir permis une entrée dans la pensée fonctionnelle et le deuxième monde de Tall mais elle ne favorise pas le passage naturel au registre algébrique. Les élèves travaillent volontiers dans la troisième partie mais leur travail algébrique est déconnecté des deux premières parties et elles n'en comprennent pas l'enjeu. Elles ont de grandes difficultés algébriques à mettre l'expression développée sous forme canonique et sont aidées par l'observateur. C'est ensuite l'enseignant au tableau qui aide toute la classe à interpréter globalement l'expression canonique, c'est-à-dire en déduire la valeur du minimum et la valeur pour laquelle ce minimum est atteint.

ii) Le projet Remath et Casyopée, le développement du monde symbolique proceptuel

Dans le travail avec le logiciel Casyopée, le même genre de situation liant cadre géométrique et cadre fonctionnel est expérimentée avec des élèves de classes de première S. Casyopée est un logiciel ouvert construit spécifiquement pour faciliter cette transition géométrie – fonctions. Il possède deux environnements principaux qui peuvent communiquer : un environnement fonctionnel (fenêtre symbolique et fenêtre graphique) et un environnement de géométrie dynamique. L'attrait principal de Casyopée est de supporter l'interaction entre ces deux environnements distincts par l'intermédiaire d'objet nouveaux : les calculs géométriques (Lagrange et Gélis 2008).

Le problème travaillé avec les élèves de première S (début d'année) est le suivant : A, B et C sont trois points fixés du plan. On considère le rectangle MQPN (avec M sur [OA] ; Q sur [OC] ; N sur [AB] et P sur [BC]). Il s'agit de savoir si l'on peut construire un rectangle MNPQ d'aire maximale inscrit dans le triangle ABC. La tâche est donc plus complexe que dans les classes de seconde à cause de la généricité de la question et la présence des trois paramètres.

L'enjeu est n'est plus seulement de développer la pensée fonctionnelle des élèves mais aussi de développer le monde symbolique proceptuel des élèves (deuxième monde de Tall, pensée fonctionnelle avancée). Le sujet proposé aux élèves est le suivant :

1S séance 6 vendredi 7 décembre 2007

Un problème d'optimisation

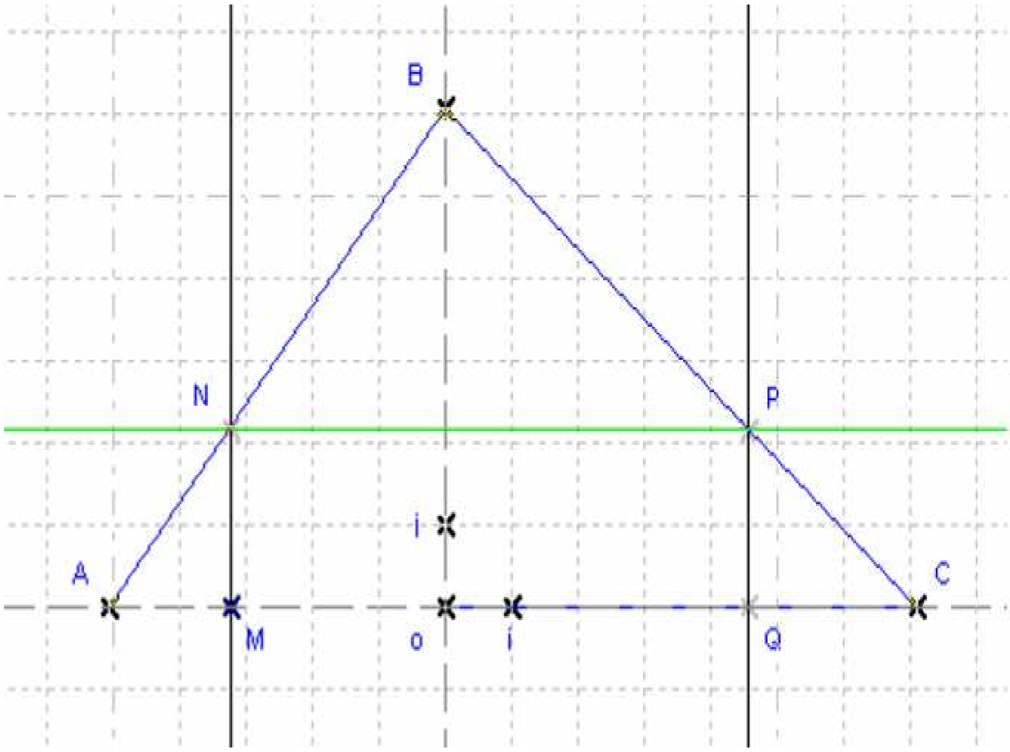
Soient a, b et c, trois paramètres positifs.
On considère les points A (– a, 0) et B (0, b) et C(c, 0).
On construit le rectangle MNPQ avec M sur [oA], N sur [AB], P sur [BC] et Q sur [oC].

- Peut-on construire un rectangle MNPQ d'aire maximale ?
- MNPQ peut-il être un carré ?

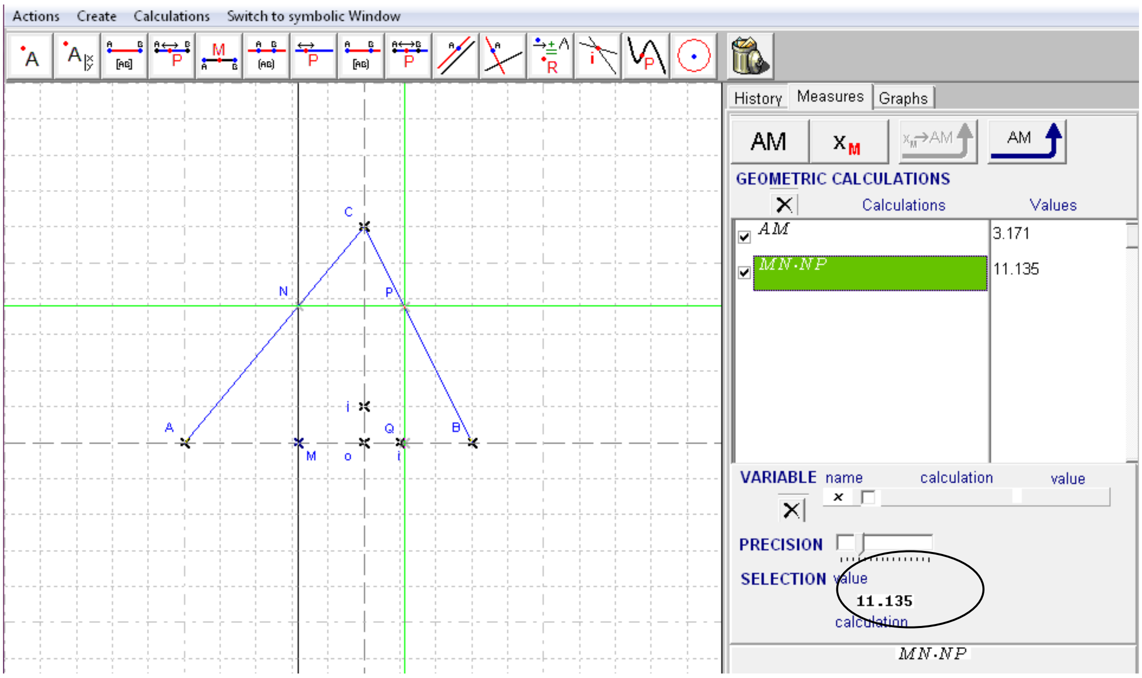
Travail demandé

1. Charger le fichier figinit.cas puis compléter la figure avec le logiciel.
   remarque : il est nécessaire de construire les segments [oA], [AB], [BC] et [oC] pour définir correctement les points du rectangle.
2. Répondre aux deux questions posées avec les consignes suivantes :
   - Indiquer le choix de variable.
   - Rédiger une démarche utilisant les résultats affichés par le logiciel.
   - Visualiser la réponse dans le module de géométrie dynamique.

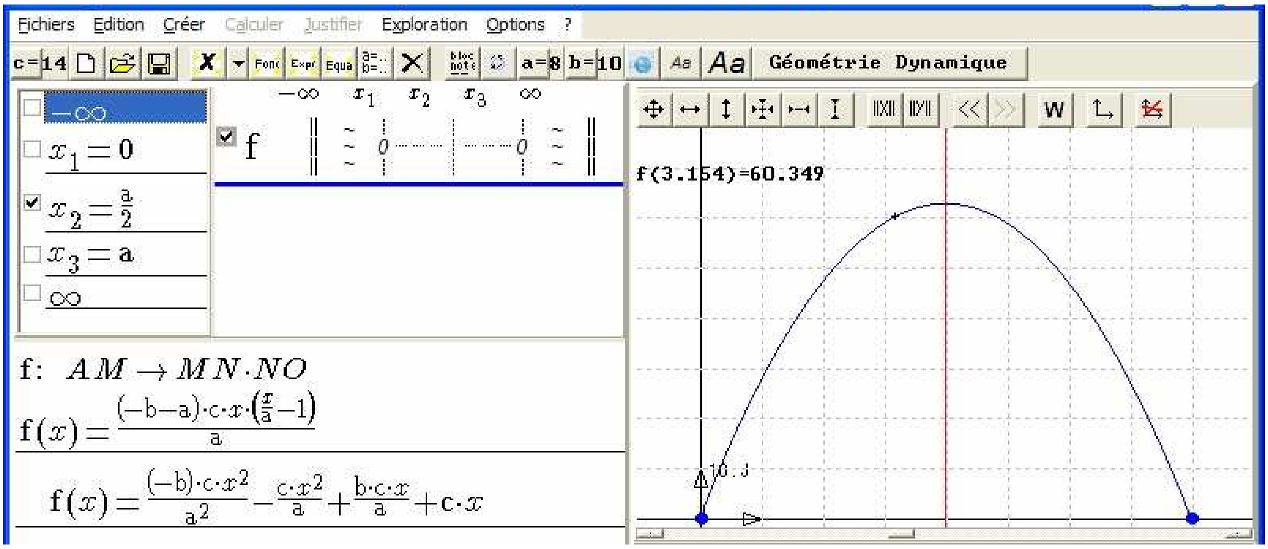
La figure de base est déjà créé dans Casyopée et fournie aux élèves : *figinit.cas*. Les paramètres sont instanciés dans la figure fournie à *a*=5, *b*=5 et *c*=5. Le problème de la généricité n'est donc pas visible en premier lieu pour les élèves. Les élèves doivent seulement créer les points M, N, P et Q. La construction doit être correctement exécutée pour que la figure résiste au déplacement de l'un des points M, N, P ou Q. L'intérêt de fournir partiellement la figure est de gagner du temps d'une part mais aussi que la construction des points M, N, P et Q sensibilise les élèves au fait que seul un point est indépendant sur l'un des côtés du triangle et que les trois autres sont liés. C'est un biais différent de l'usage du curseur de Géogébra pour sensibiliser à la variable indépendante mais cela doit contribuer de la même façon à favoriser l'activité des élèves dans le cadre fonctionnel (dialectique productif / constructif à l'œuvre).



Comme dans le projet Comenius, les élèves doivent ensuite conjecturer numériquement la valeur du maximum et la position des points M, N, Q et P. Pour cela ils doivent créer dans Casyopée un calcul géométrique représentant la grandeur à étudier. Ici MN * NP par exemple. Ce n'est donc pas comme dans Géogébra où les élèves font afficher directement l'aire du polygone qui les intéresse. De ce point de vue, Casyopée doit donc aider à surmonter les difficultés repérées plus haut chez Aurélien et Arnaud dans la recherche de l'expression algébrique de la fonction (activités générationnelles algébriques pour un accès au monde symbolique proceptuel). La création du calcul géométrique MN * NP est ainsi un pont entre la géométrie et la formule, tout en permettant l'exploration numérique de la covariation comme avec Géogébra.



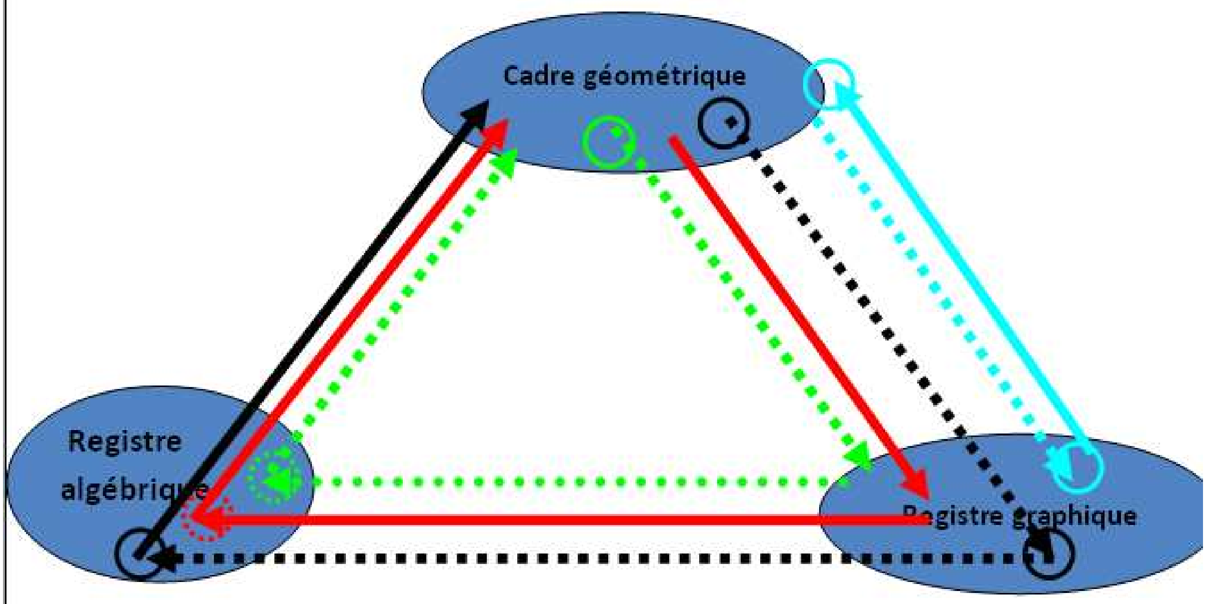
Les 5 sessions précédents la séance étudiée ici devaient permettre la prise en main de Casyopée, afin que pour cette séance les élèves, non seulement construisent correctement la figure, s'engagent dans l'exploration numérique et la pensée fonctionnelle mais aussi accèdent au monde symbolique proceptuel. En particulier, la séance précédente était axée sur le choix de variables pertinentes pour modéliser une situation géométrique. Casyopée permet en effet le choix de plusieurs variables indépendantes dans un problème d'étude de calcul géométrique (maximiser une aire en l'occurrence ici). Par ses feedbacks, il permet également de valider ou d'invalider les choix de variables des élèves. Les élèves étaient donc déjà introduits à créer un calcul géométrique représentant une aire à étudier, à choisir une ou plusieurs variables indépendantes dont ce calcul géométrique dépend, à créer la ou les fonctions correspondantes. D'autres situations paramétrées avaient aussi déjà été abordées lors des deux précédentes séances avec Casyopée. Cependant les problèmes que les élèves devaient résoudre jusqu'alors étaient des problèmes ponctuels d'égalité d'aires. Le problème de maximisation étudié ici met en jeu les variations et l'aspect global de fonctions paramétrées, ce qui constitue l'adaptation majeure des connaissances construites lors des séances précédentes.



Dans la séance étudiée ici, aucune autre indication n'était donnée que celles de la fiche élève présentée ci-dessus. Les élèves pouvaient construire librement leur rectangle, en particulier choisir le point libre M, N, P ou Q. Les élèves pouvaient ensuite librement choisir une variable pour étudier les variations de l'aire de MNPQ. Le professeur devait rester autant que possible en retrait et laisser les élèves en activité la plus autonome possible.

Casyopée prend en charge la formation des représentations algébriques ou graphique des fonctions proposées par les élèves (via le choix d'un calcul géométrique et d'une variable indépendante), ce qui soulage l'activité générationnelle algébrique des élèves dont il apparaît plus haut qu'elle posait déjà des difficultés à des élèves faibles dans la situation non paramétrée du projet Comenius. L'enjeu d'apprentissage avec Casyopée en 1$^{\text{ère}}$ S porte plutôt sur les traitements et les conversions entre représentations graphique, algébrique et l'aptitude des élèves à relier les informations entre le cadre géométrique et le cadre fonctionnel. La difficulté liée à l'usage des paramètres est présente car les registres numériques et le graphique sont instanciés (a=5, b=5 et c=5 dans la figure par défaut) mais la formule algébrique ne l'est pas, mentionnant les paramètres sous leur forme littérale.

Les observations de 4 binômes d'élèves montrent que certains élèves ne rentrent pas dans le deuxième monde, restant dans le premier monde d'expérience de la pensée fonctionnelle. Pour les autres, qui entrent dans une pensée fonctionnelle avancée, ils focalisent sur certaines représentations des fonctions plutôt que d'autres et les aides nécessaires du professeur montrent quelles sont les traitements ou conversions de registres (ou changements de cadres) qui sont les plus difficiles aux élèves. Ce sont les changements de fenêtres de travail dans Casyopée qui permettent de rendre compte de ces traitements et conversions ou de ces changements de cadres.



Les cercles ronds correspondent à des traitements à l'intérieur d'un registre ou d'un cadre – (conjecture numérique dans l'environnement géométrique ; recherche du maximum sur le graphique ; traitement algébrique). Les flèches correspondent à des conversions ou des changements de cadres. Les pointillés signifient que les élèves ont eu besoin de l'aide du professeur. Les traits pleins montrent le travail en autonomie.

Elina et Chloé (flèches vertes) : après leur construction, les deux élèves créent spontanément le calcul géométrique MN*NQ qui les intéresse. Elles font bouger le point M et se rendent compte très vite que la mesure MN*NQ grandit quand la surface du rectangle diminue sur leur figure. Ceci leur pose problème et elles ne comprennent pas pourquoi. En fait, c'est dû à une erreur de frappe. Elles ont tapé MN*MP et elles corrigent leur erreur de frappe avec l'aide de l'observateur. Ensuite, assez vite l'une d'elle déclare « C'est quand N est le milieu de [AB] je crois et P le milieu de [BC] ». Pour vérifier, elles ajustent géométriquement N au milieu de [AB] et contrôlent que MN*NQ semble numériquement maximum. L'élève rajoute alors « Et quand MN=NQ, ce sera un carré ». Elles ajustent à l'œil le carré mais elles sont quand même moyennement satisfaites : « *Après je sais pas comment on fait pour faire varier les paramètres ?* ». Ce binôme ne raisonne donc qu'à partir de la situation géométrique. Elles expérimentent bien la covariation dans ce cadre et réalisent même qu'elles ont fait une erreur. Malgré les séances antérieures et bien que Casyopée présente les fonctionnalités pour une activité productive supposée favoriser le passage au cadre fonctionnel puis la pensée fonctionnelle avancée, les deux élèves sont cantonnées dans le premier monde de la pensée fonctionnelle.

C'est le professeur qui pousse à dépasser ce premier monde en leur demander une preuve de leur conjecture. Devant la difficulté persistante des élèves, le professeur leur demande un compte rendu de la séance précédente. L'aide est donc très procédurale. Les élèves pensent à ce moment à créer une fonction et donc à choisir une variable. Les élèves essaient NP et trouvent l'expression algébrique fournie par Casyopée trop compliquée. Elles essaient ensuite MN et obtiennent un message d'erreur : « impossible de comparer b et x_1 ». Il stipule que MN ne peut pas être une variable indépendante compte tenu de la relation entre MN et le paramètre b mais elles ne comprennent pas. Elles essaient alors MQ et obtiennent le même résultat que pour NP. Elles semblent de nouveau bloquées. Le professeur leur conseille de regarder le menu de création des variables pour voir ce qu'il est possible de choisir. Elles font défiler d, x, y. L'une des élèves pense à y_N qui correspond à MN mais propose ensuite x_M. Ensuite la création automatique de la fonction ne pose pas de problème. L'activité de formation des représentations algébriques et graphiques est prise en charge par Casyopée. Mais les élèves ne semblent pas beaucoup plus avancées, ce qui tend à montrer que l'activité de formation des représentations fonctionnelles, médiée par Casyopée, et l'aide procédurale du professeur « n'est pas » dans la ZPD des élèves. Elles ont encore besoin de l'aide du professeur pour reconnaître une parabole et aller vers le registre algébrique. A ce moment là, elles se souviennent comment calculer le maximum (disponible). Elina et Chloé sont maintenant dans des procédures très algébriques. A cause des paramètres qui réapparaissent à ce moment dans la formule algébrique fournie par Casyopée, elles ne peuvent mener leur calcul à bien. Il y a un conflit entre $-b/2a$ pour trouver l'extremum d'une parabole ax^2+bx+c et les a,b,c qui sont les paramètres qui interviennent ici. Les élèves doivent donner des valeurs numériques au paramètres a,b,c et se retrouvent avec $f(x)=10x-x^2$. Elles identifient le a et le b pour la formule $-b/2a$, calculent alors la valeur et la position pour le maximum mais ne reviennent pas spontanément dans la fenêtre géométrique pour vérifier leur résultat. C'est à nouveau le professeur qui doit leur demander d'interpréter leur résultat ce qui est concordant avec le fait que le passage géométrique vers algébrique ne semblait pas avoir été contrôlé par les deux élèves. Le travail avec Casyopée a été difficile pour elles. L'activité constructive attendue ne semble pas s'être développée, même si le versant productif a été entretenu avec l'aide du professeur. L'hypothèse qu'elles n'ont pas du tout une approche coordonnée des fonctions, caractéristique de la pensée fonctionnelle avancée dans le second monde de Tall, peut être faite. A minima, à la fin de la séance, quand les deux élèves voient que le 5/2 qu'elles ont trouvé vaut 2,5 (avec l'aide de l'observateur), elles relient ce 2,5 à la valeur numérique trouvée au moment de l'exploration numérique dans le cadre géométrique.

Nathalie et Charlotte (flèches noires) : comme Elina et Chloé, les élèves font une exploration géométrique et numérique de la covariation et conjecturent que la position optimale de M est le milieu de [oA]. En outre, elles font varier les valeurs des paramètres pour tester leur hypothèse. Mais comme pour Elina et Chloé, c'est le professeur qui doit leur demander une preuve de la conjecture. Il doit également les aider à choisir une variable pour créer la fonction. Les aides sont alors très procédurales. Les élèves voudraient lire directement les coordonnées du maximum sur le graphique (traitement dans le registre graphique), ce qui n'est pas possible directement avec Casyopée comme ça l'est avec une calculatrice graphique traditionnelle. C'est le professeur qui doit les aider à reconnaître une parabole et à faire le lien avec la forme algébrique du second degré fournie par Casyopée (conversion graphique-algébrique). Il s'agit encore d'aides très procédurales. Alors l'une des deux élèves se souvient de l'abscisse du sommet et écrit x_{max}= -b/2a. L'observateur suggère de noter –B/2A avec des majuscules pour ne pas confondre avec les paramètres a, b, c de la situation. Sans trop de problème, les élèves trouvent alors le maximum x_{max} = b/2 et elles reconnaissent algébriquement le résultat qu'elles avaient conjecturé dans la fenêtre géométrie. Dans ce cas, l'activité productive a été entretenue avec l'aide du professeur pour ce qui concerne le changement de cadre géométrie-fonction et pour les conversions de registres graphique-algébrique. L'activité constructive a seulement permis le changement de cadre final, du fonctionnel vers le géométrique quand les deux élèves ont reconnu au travers de leur résultat algébrique leur conjecture initiale.

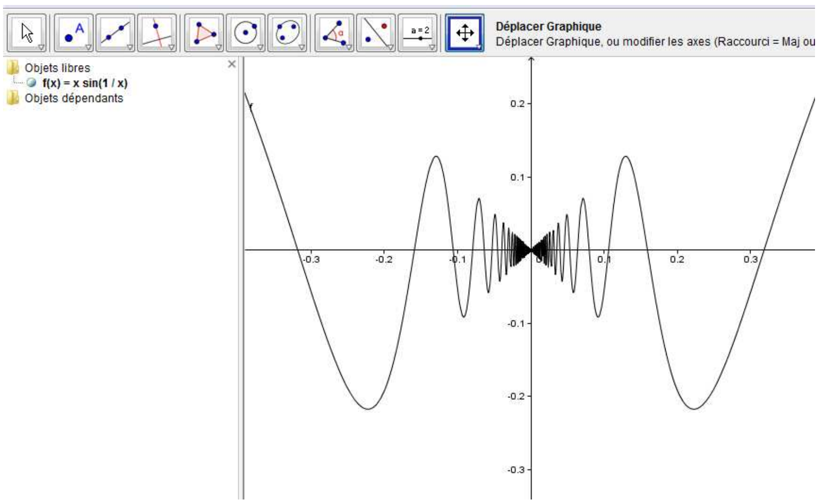
Amandine et Pauline (flèches rouges) : les élèves ne font pas du tout d'expérimentation géométrique ou numérique. Elles demandent au professeur de les aider à choisir une variable indépendante et créent directement une fonction. Elles reconnaissent facilement une parabole et un maximum sur la parabole. Alors elles identifient dans l'expression algébrique fournie par Casyopée la forme du second degré mais elles restent en difficultés face à l'expression algébrique avec les paramètres. Le professeur doit les aider pour trouver la solution algébriquement. Après cela, elles retournent dans la fenêtre géométrique et vérifie naturellement que la solution qu'elles ont trouvée algébriquement correspond réellement à un maximum dans la fenêtre géométrique. Ici le cycle attendu n'est pas complet car les élèves vont directement dans le cadre fonctionnel. Cependant elles font bien la relation entre la représentation globale de la parabole et le traitement algébrique que l'on doit faire de l'expression fournie par Casyopée. Le travail sur Casyopée ne les a pas aidé à modéliser (choisir seule une variable indépendante) mais cependant elles retournent spontanément vérifier leurs résultats algébriques dans la fenêtre géométrique ce qui peut montrer qu'il y a eu là encore une construction de connaissances (activité constructive) favorisant le changement de cadre à l'arrivée entre cadre fonctionnel et cadre géométrique et la coordination entre les registres graphiques et algébriques.

Marine (flèches bleues) : l'élève est aidée par le professeur pour créer le calcul géométrique MN * QM. Le professeur doit aussi l'aider à créer la variable x_M, la fonction et l'affichage du graphe. L'élève reconnaît une parabole mais cherche à trouver le maximum graphiquement. Un autre élève l'aide à zoomer et se recentrer. Alors elle essaie de lire directement les coordonnées du maximum sur le graphique, ce qui n'est pas possible directement. Elle constate alors que le point courant sur le graphique correspond au point M dans la fenêtre géométrique. Elle manipule M dans la fenêtre géométrique et constate le déplacement du point courant sur le graphique. Elle comprend et ajuste le point M pour que que le point courant soit au sommet de la parabole. Finalement aucune preuve n'est faite dans le registre algébrique.

3.c L'articulation de F1 et F2 avec les technologies en terminale, la préparation du travail local, perspectives

Rappelons que l'enjeu du domaine de travail F2 est d'utiliser la puissance de l'algèbre pour traiter de façon plus performante et rigoureuse des problèmes fonctionnels ponctuels, globaux ou locaux. Cela ne doit pas pour autant se substituer au travail engagé dans le domaine F1 et notamment le lien entre représentations graphiques et représentations algébriques des fonctions. Il convient donc, en premier lieu, avec les nouvelles technologies, de redonner un rôle d'outil au graphique, au cœur de l'activité mathématique.

Des situations d'usage des technologies en ce sens ont déjà été développée, par exemple par Maschietto (2008). La localisation du regard grâce aux nouvelles technologies (adoption d'une perspective locale) se retrouve encore dans l'exemple suivant, où l'on utilise la fonctionnalité de zoom de Géogébra :



Le zoom à partir du graphe de la fonction f(x)=x sin (1/x) peut permettre de coordonner la non dérivabilité graphique en 0 de la fonction avec le même résultat obtenu algébriquement par un calcul de limite. Nous développons plutôt l'exemple suivant issu de Gueudet et Vandebrouck (2011).

Il est inspiré d'un sujet de l'épreuve pratique au Baccalauréat S. Les élèves, qui travaillent sur GeoGebra, doivent conjecturer le nombre de solutions de l'équation ln(x) = k x^2 en fonction du paramètre k. Il s'agit donc d'une activité correspondante au deuxième monde de Tall. Les technologies permettent d'expérimenter la situation pour de nombreuses valeurs de k ce que ne permet pas le travail en papier-crayon. L'accent peut donc ainsi être plus porté sur la représentation graphique associée à cette situation algébrique, favoriser la perspective globale et l'activité de conversion entre les deux registres fonctionnels, constitutifs de l'approche coordonnée des fonctions. Le travail de preuve met en jeu la continuité et la dérivabilité des fonctions en jeu, ce qui relève du travail dans le domaine F2 mais peut ancrer ce travail dans le domaine F1.

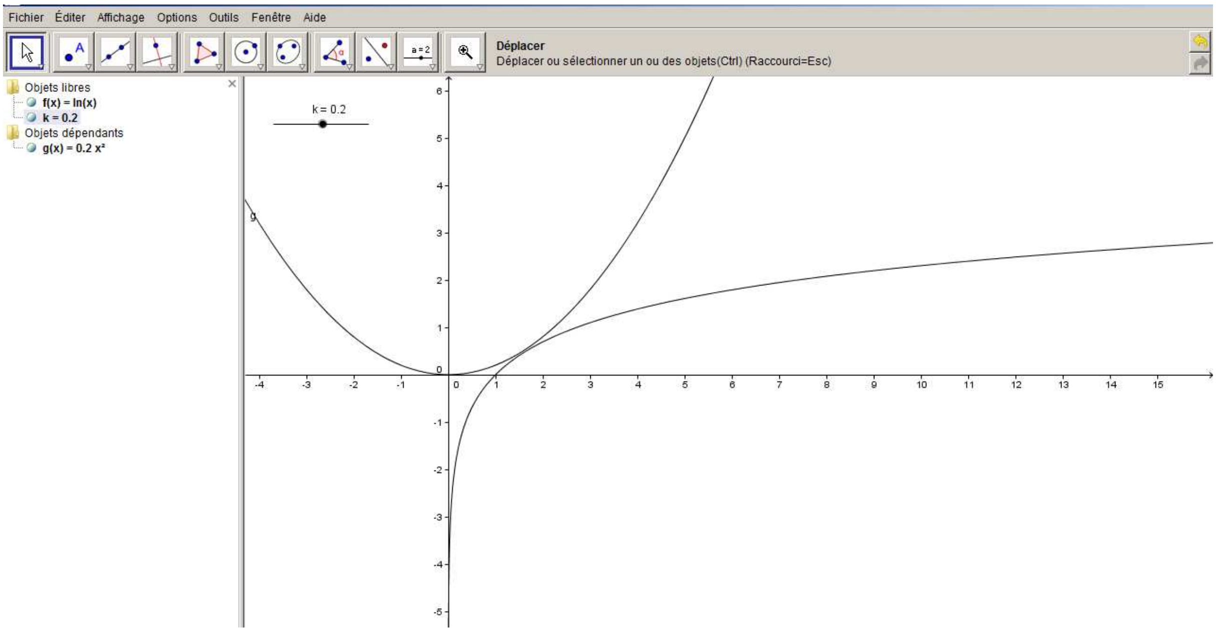
TP type BAC sur logiciel de géométrie

On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.

2) Justifier sur votre feuille ces conjectures.



Dans cet exemple, les élèves ayant repéré le rôle important du paramètre k doivent donc introduire d'eux-mêmes un curseur dans GeoGebra pour tracer par exemple les deux courbes y=ln(x) et y=kx^2. La présence du *ln* place les élèves dans le cadre fonctionnel mais ils doivent tout de même transformer le problème de résolution d'une équation fonctionnelle en problème d'intersection de courbes, ce qui correspond au changement de registre qui participe de la complexité du sujet. L'exploration sur le logiciel permet d'approcher la valeur de k pour laquelle le nombre de solutions à l'équation change (0, 1 ou 2) mais elle ne permet pas aux élèves de donner la valeur exacte qui est irrationnelle. Il s'engage donc un travail local pour approcher une valeur irrationnelle.

Après avoir compris les limites du zoom, les élèves doivent travailler dans l'environnement papier-crayon pour trouver cette valeur exacte de k avec les outils du domaine de travail F2. Comme dans toute démarche expérimentale, il est attendu que l'entrée dans la preuve puisse être favorisée par le fait d'obtenir partiellement la conjecture grâce au logiciel (ici une valeur approchée aussi précise que l'on veut) et que le maintien en activité des élèves puisse être possible par les allers-retours entre machine et papier-crayon.

Dans cet exemple la perspective ponctuelle (problème d'intersection), la perspective globale (via les graphiques qui bougent globalement) et la perspective locale (approximation d'une valeur irrationnelle) sont toutes travaillées. Cependant des phénomènes d'instrumentation liés au travail spécifique sur le logiciel apparaissent, plus précisément liés aux rapports conflictuels entre perspectives ponctuelle et locale évoqués plus haut et aux genèses instrumentales des technologies ouvertes : les professeurs signalent par exemple « *certains élèves croyaient dur comme du fer que, comme ils voyaient que pour 0,2 il n'y avait qu'une solution, k=0,2 était une valeur exacte, après cela a été pareil pour 0,18 ….* » ou par exemple *« entre 0,18 et 0,19, on ne regarde pas, on ne sait rien dire de précis…* ». Cela renvoie aux difficultés observées avec Géogébra ou Casyopée lorsque les élèves ne recherchent les extremums que par des explorations numériques (sans préjuger de leur valeur entière, décimale, rationnelle ou irrationnelle). C'est une difficulté à prendre en compte pour la suite des recherches.

Notons que suite à l'épreuve pratique et le type de sujet dans le style du précédent, le sujet de bac 2010 a réintroduit les paramètres dans les tâches demandées aux élèves, comme dans l'exemple ci-dessous. Même sans rapport aux technologies, ceci permet de remettre l'accent sur la perspective globale des fonctions définies algébriquement en associant à chaque valeur du paramètre k une fonction f_k. En outre, dans ce sujet le graphique reprend un rôle d'outil alors qu'il a souvent un rôle objet dans les sujets de toutes les précédentes années. Enfin, quelques tâches ne sont pas découpées en sous-tâches à l'instar de la question 1) de l'énoncé, où les élèves doivent introduire la dérivée et étudier les variations de f_k pour prouver l'existence du maximum.

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_k(x) = (x+k)\mathrm{e}^{-x}$$

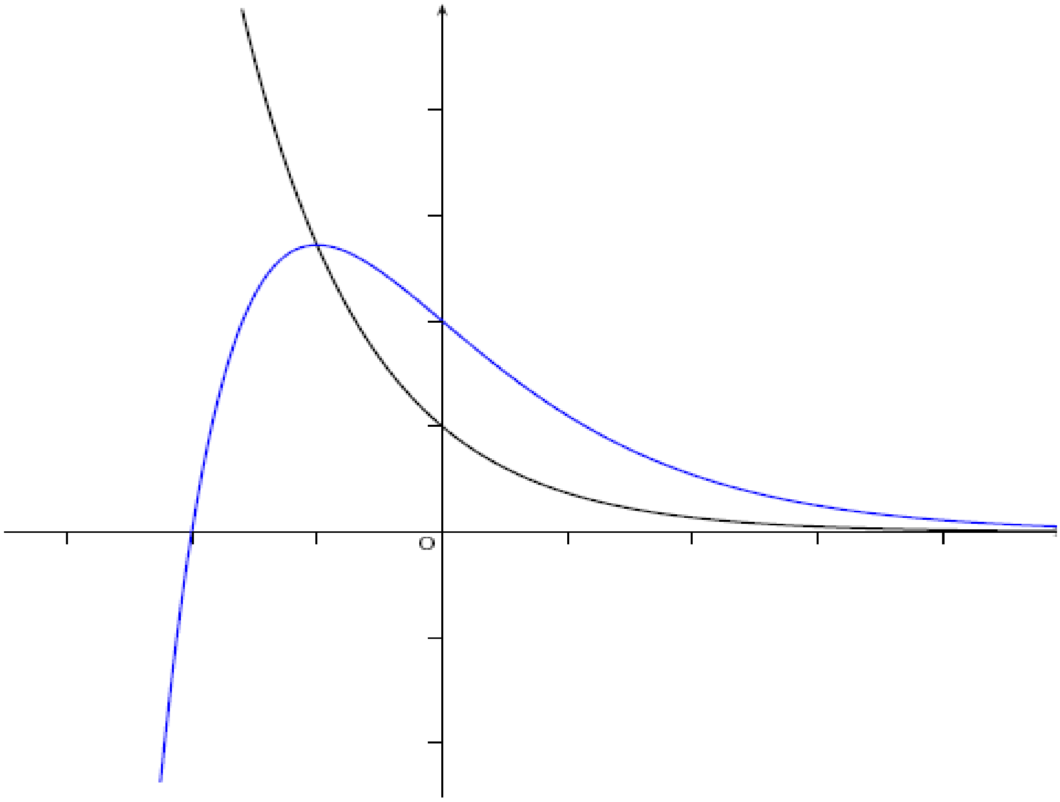
où k est un nombre réel donné.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1-k$.
2. On note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1-k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.
3. Sur le graphique donné en annexe 1 (à rendre avec la copie), le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
   - la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$;
   - la courbe $\mathscr{C}_k$ d'équation $y = (x+k)\mathrm{e}^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

   a. Identifier les courbes et les nommer sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie).

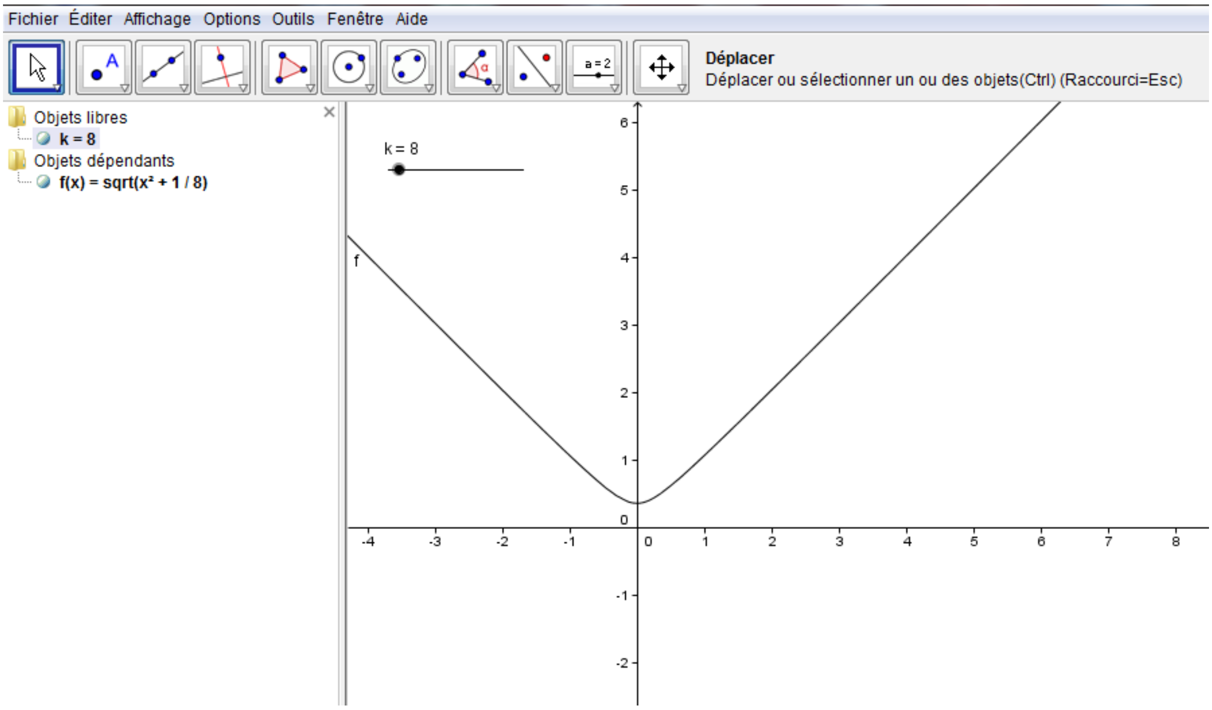
   b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



Le rôle outil du graphique est présent dans la question 3) où les changements de registres se font du graphique vers l'algébrique : il faut d'abord prendre des informations sur le graphique pour mettre en correspondance les courbes et les expressions algébriques. Ces informations peuvent être globales (variations, stricte décroissance de exp($-x$)) ou locales (limites en – l'infini), au choix de l'élève. Ici, la perspective ponctuelle ne suffit pas car les graduations ne sont pas connues. Ensuite, les élèves doivent identifier le nombre k correspondant à la fonction f_k représentée. Pour cela, ils doivent cette fois adopter une perspective ponctuelle sur le graphe (en x=0). Il y a un changement de point de vue sur la courbe car les élèves doivent utiliser que la courbe exponentielle passe par (0,1) pour conclure que la graduation en ordonnée est 1. Ensuite, il y a un traitement d'informations dans 2 registres simultanément : f_k (0)=k et la courbe de f_k passe par la deuxième graduation donc k=2. Enfin, un dernier changement de registre entre l'équation f_2 (x)=0 de solution x=-2 et l'intersection du graphe de f_k avec l'axe des x à la deuxième graduation. Il faut en déduire que la graduation est également 1 en ordonnée.

Notre intention est d'utiliser les technologies pour faire travailler la perspective locale aux élèves, dès les classes de première et de terminale, compte tenu des programmes en cours. Cette possibilité vient également en revisitant les travaux de Robinet (1984) sur la convergence uniforme des suites de fonctions. Bien sûr il n'est pas question d'aborder la convergence uniforme avec les élèves. Cependant, nous mettons à profit le fait que les représentations graphiques permettent de faire travailler les fonctions comme objet et la perspective globale sur ces objets. En outre, grâce à la fonctionnalité de curseur, il est très facile de traiter de famille de fonctions et en particulier de suite de fonctions. Lorsque le paramètre augmente vers l'infini, la famille de courbe représentée se rapproche d'une courbe limite que les élèves peuvent très bien visualiser sans pour autant qu'elle soit atteinte. Il est facile de définir à partir de cette expérimentation graphique la limite simple de la suite de fonctions, de façon naturelle. Il vient naturellement un nouvel objet f, appréhendé par son graphe avant d'avoir son expression algébrique. Des propriétés de continuité et de dérivabilité des fonctions f_k peuvent ou non être transmises à la fonction f . Cela peut donner lieu à des activités intéressantes avec les élèves mais nous n'avons pas encore développé ces recherches. Nous nous contentons de quelques exemples pour terminer ce paragraphe.

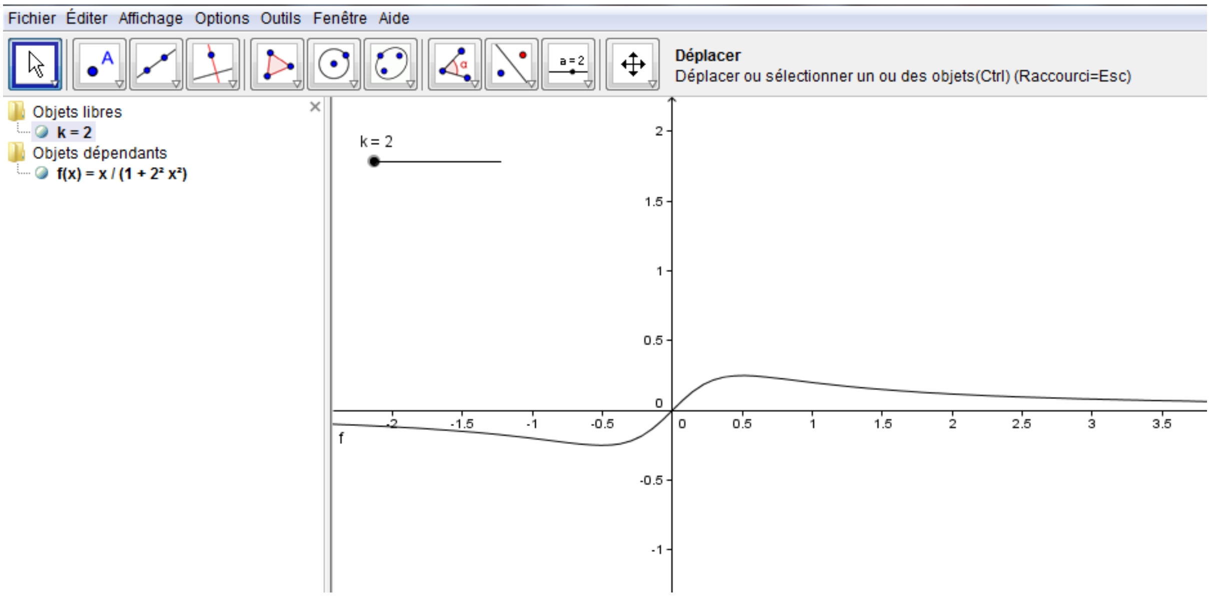


Il peut être demandé aux élèves des questions sur la continuité et la dérivabilité des fonctions f_k définies par

$$f_k(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$$

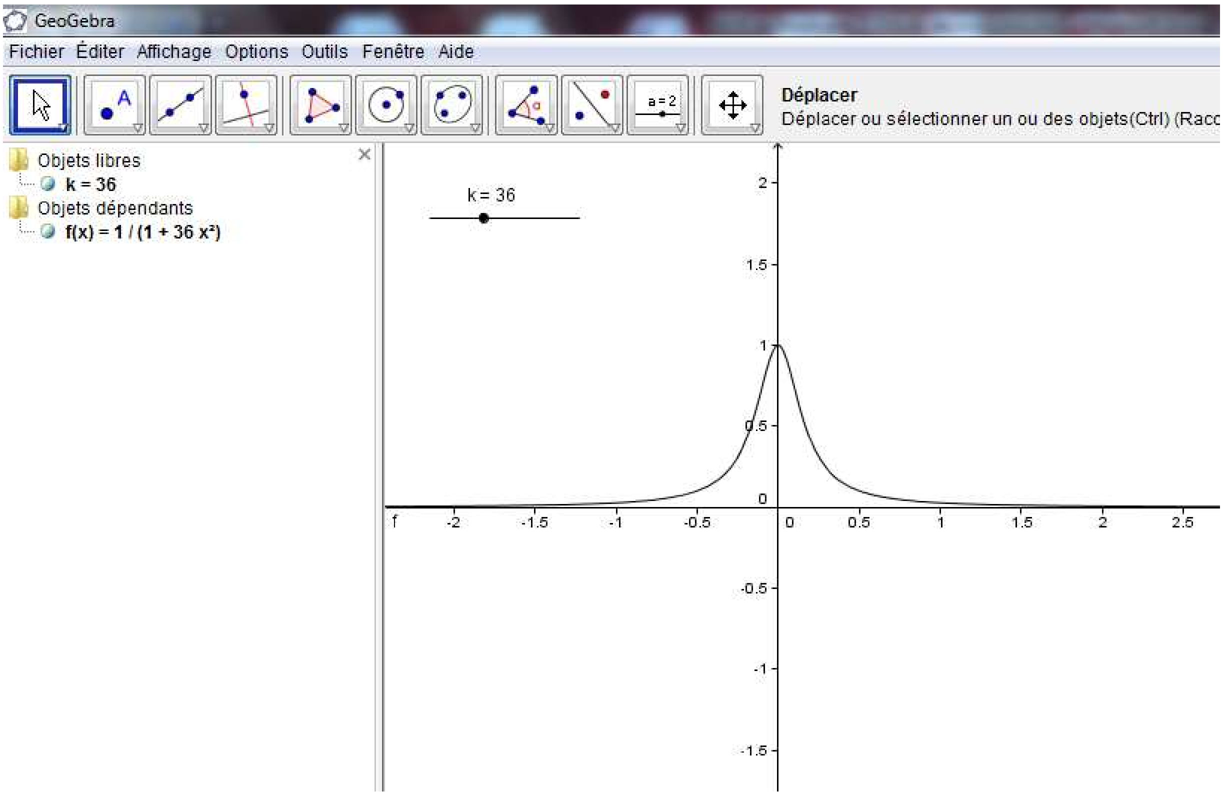
ainsi que des questions sur leur tableau de variation. Dans cet exemple, il est facile de calculer, à x fixé la limite de la suite $f_k(x)$ lorsque k tend vers l'infini. Il s'en déduit la définition d'une fonction limite, que les élèves peuvent à la fois conjecturer graphiquement et retrouver algébriquement. Cela montre aussi que certaines propriétés des fonctions f_k se conservent alors que d'autres ne se conservent pas par passage à la fonction limite.

Les autres exemples ci-dessous sont issus de l'ingénierie de Robinet (1984) et sont donnés en guise de perspectives.



$$f_k(x) = \frac{x}{1 + k^2 x^2}$$

Les dérivées des f_k en 0 tendent vers 0. La fonction limite est la fonction nulle.



$$f_k(x) = \frac{1}{1 + kx^2}$$

Les f_k sont continues et dérivables et valent toute 1 en 0. La limite est discontinue en 0.

4. Conclusion

Dans ce chapitre, il s'agissait de traiter de l'intégration des technologies dans l'enseignement de l'Analyse au lycée et à l'université. Notre hypothèse est que l'usage des technologies pour étudier les fonctions met plus l'accent sur les représentations graphiques des fonctions et leur rôle heuristique dans l'activité mathématiques. Ces représentations permettent mieux d'adopter les différentes perspectives sur les fonctions, en particulier la perspective globale qui semble faire défaut à bons nombres d'élèves à la fin de la terminale et au début de l'université. Nous avons envisagé les technologies comme permettant a priori :

1) d'enrichir l'herbier de fonctions disponibles chez les élèves au sens de Robert (2011), et notamment dépasser l'herbier constitué des fonctions affines, des fonctions polynômes du second degré, voire au mieux de la fonction racine carré, la fonction valeur absolue et la fonction inverse ;

2) articuler le travail du domaine F2 (calculs de limites, de dérivées, tableaux de variations à partir de l'étude de la dérivée) au travail effectué en amont dans le domaine F1 (études de propriétés ponctuelles et globales, utilisation des quantifications universelles…) pour entretenir la perspective globale sur les fonctions et l'approche coordonnées algébrique - graphique ;

3) favoriser l'entrée dans la perspective locale et préparer ainsi le domaine de travail F3.

On peut penser que les BEL peuvent aider pour le premier objectif. Des exercices comme l'exercice joint proposé plus haut permettent aux étudiants de début de première année de revisiter leurs connaissances de terminale en étendant l'herbier de fonction travaillées. La génération aléatoire permet de mélanger les différents types de fonctions à leur disposition : polynomiale, exponentielle et logarithmique. Il vient des fonctions trigonométriques, homographiques, rationnelles, radicales… Cependant les BEL, si elles ont des bénéfices pour l'activité des élèves et des étudiants sur les exercices « techniques », ont des limites dès que la complexité des exercices s'accroit. Par exemple, l'exemple du QCM pour faire travailler le lien entre limites de suites et continuité des fonctions montre que cette connaissance locale ne s'installe pas en utilisant la BEL.

Il s'avère donc plus intéressant de penser aux technologies ouvertes afin de faire travailler les multiples facettes des fonctions : cadres, registres et perspectives et investiguer les points numéro 2) et 3) ci-dessus. Les deux expérimentations permettent d'éclairer la complexité de l'adoption de la perspective globale sur les fonctions et l'approche coordonnée entre algébrique et graphique. Les explorations numériques de la covariation, voire la coordination des explorations numérique et graphique de la covariation (activité productive), semblent bien favoriser une activité constructive des élèves dans le cadre fonctionnel, avec un point de vue global sur la fonction en jeu dès lors qu'il s'agit de rechercher un extremum global. Cependant, si les élèves peuvent adopter la perspective globale à partir de la représentation graphique, il semble aussi que cela ne garantit pas encore une coordination entre graphique et algébrique. Autrement dit, ils ne sont pas pour autant capables de traiter la représentation algébrique en coordination avec l'aspect global que leur apporte naturellement la représentation graphique. Seules Amandine et Pauline semblent ici avoir une approche coordonnée de la fonction en jeu. Tout ce matériel contribue donc à un champ de recherche à poursuivre.

Enfin, l'ouverture à la perspective locale avec les technologies ouvertes est un champ de recherche juste esquissé, mais le fait de pouvoir réinvestir des ingénieries anciennes de façon totalement rénovée semble prometteur.

Bibliographie du chapitre 2

ABBOUD-BLANCHARD M., CAZES C., VANDEBROUCK F. (2009) Activités d'enseignants de mathématiques intégrant des bases d'exercices en ligne. *Quadrante, Special Issue ICT in Mathematics Education*. Vol 18 (1-2). pp 147-160.

ARTIGUE M., et al. (2006) Suivi de l'expérimentation de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques en classe de seconde. Publication de IREM de Paris 7.

ARTIGUE M., et al. (2011) The shop sign family: a project for supporting teachers'use of ICT - communication affichée, Dans *Actes de CERME 7*. University of Rzeszow. 9-13 février 2011.

ARZARELLO F., ROBUTTI O. (2004) Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 57 (3) Special issue CD Rom.

BROUSSEAU G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CAZES C., et al. (2006) Using E Exercises bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computer in Mathematics Learning*. Vol 11 (3). pp 327-350.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

DURAND-GUERRIER V. (2006) About logic, language and reasonning at the transition between French upper secondary school and University.

Communication de la commission inter irem université (CI2U), Dans *Actes de ICMI.* Monterey, Mexico.

DUVAL R. (1991) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 5. pp 37-65.

ENGESTRÖM Y., MIETTINEN R., PUNAMÄKI R. L. (Eds) (1999) *Perspective on activity theory,* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

FALCADE R., LABORDE C., MARIOTTI M. A. (2007) Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 66. pp 317-333.

GALPERINE P. (1966) Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. Dans A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (Eds.) *Recherches psychologiques en URSS* (pp.114-132). Moscou: Editions du progrès.

GELIS J.-M. (2009) Une double approche, par objets et registres, appliquée aux actions des élèves dans des EIAH d'apprentissage de l'analyse, Dans *Actes de EIAH 2009.* Le Mans.

GUEUDET G., VANDEBROUCK F. (2011, à paraître) Technologies et études des pratiques enseignantes: études de cas et éclairages théoriques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 31 (3).

HASPEKIAN M. (2008) Une genèse des pratiques enseignantes en environnement tableur. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématique: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.293-318). Toulouse: Octarès.

HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2006) Bases d'exercices en ligne et phénomènes d'enseignement-apprentissage. *Repère IREM*. Vol 62. pp 71-84.

JAWORSKI B., GOODCHILD S. (2006) Inquiry community in an activity theory frame, Dans (Eds.) *Actes de PME XXX.* Prague.

KIERAN C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Dans F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics teaching and learning* (pp.707-762). Greenwich, CT:

KIERAN C., DRIJVERS P. (2006) The co-emergence of machine techniques, paper and pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal for Computer Algebra in Mathematics Education*. Vol 11. pp 205-263.

KRYSINSKA M., MERCIER A., SCHNEIDER M. (2009) Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 29 (3). pp 247-303.

LAGRANGE J.-B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 43. pp 1-30.

LAGRANGE J.-B., ARTIGUE M. (2009) Students'activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysis uses, Dans *Actes de Conference of European society of Research in Mathematics Education (CERME 6).* Lyon, France. Janvier 2009.

LAGRANGE J.-B., et al. (2010) Représenter des mathématiques avec l'ordinateur, Dans M. Abboud-Blanchard et A. Fluckiger (Eds.) *Actes de Séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2010.* ARDM et IREM de Paris 7.

LAGRANGE J.-B., GÉLIS J.-M. (2008) The Casyopée project: a Computer Algebra Systems environment for students' better access to algebra. *International Journal for Continuing Engineering Education and Life-Long Learning*. Vol 18 (5/6). pp 575-584.

LEONTIEV A. (1984) *Activité, Conscience, Personnalité,* Moscou: Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).

LEPLAT J. (1997) Contribution à la psychologie ergonomique, Paris: PUF.

MASCHIETTO M. (2008) Graphic Calculators and Micro Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*. Vol 13. pp 207-230.

PASTRE P. (2005) La deuxième vie de la didactique professionnelle. *Education permanente*. Vol 165. pp 29-46.

PASTRE P., RABARDEL P. (Eds) (2005) Modèles du sujet pour la conception - Dialectiques activités développement, Toulouse: Octarès.

PIAGET J. (1970/2005) *L'épistémologie génétique*, Paris: PUF.

PIAGET J., GARCIA R. (1989) *Psychogenesis and the history of science*, New-York: Colombia University Press.

PIHOUE D. (1997) *L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde*. Cahier de Didirem, Numéro 31, Publication de IREM de Paris 7.

ROBERT A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2). pp 139-190.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59-68). Toulouse: Octarès Edition.

ROBERT A. (2011) Des recherches de type "ingénierie". Dans C. Margolinas, et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble: La pensée sauvage.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4). pp 505-528.

ROBINET J. (1984) *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur*. Doctorat d'Etat. Universitié Paris VII. Paris.

ROGALSKI J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.23-30). Toulouses: Octarès Editions.

SAMURCAY R., RABARDEL P. (2004) Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. Dans R. Samurcay et P. Pastré (Eds.) *Recherches en Didactique Professionnelle* (pp.Chapitre 7). Toulouse: Octarès.

TALL D. (2004) Thinking through three worlds of mathematics, Dans (Eds.) *Actes de 28th conference of the international group for psychology of mathematics education.* 281-288. Bergen, Norway.

VANDEBROUCK F. (2006) Des phénomènes d'instrumentalisation pointés dans l'utilisation des bases d'exercices en classe, Dans (Eds.) *Actes de Colloque EMF 2006.* Sherbrooke, Canada. 27-31 Mai 2006.

VANDEBROUCK F. (2007) Une base d'exercices en ligne dans la classe de mathématique: activité des élèves et pratiques des enseignants, Dans G. Gueudet et Y. Matteron (Eds.) *Actes de Séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007.* ARDM et IREM de Paris 7.

VANDEBROUCK F. (Eds) (2008b) La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants, Toulouses: Octarès.

VANDEBROUCK F. (2008c) Résultats sur l'activité des élèves en classe de seconde. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.197-226). Toulouse: Octarès Edition.

VANDEBROUCK F. (2009) TICE et activité mathématique des élèves. *Bulletin de l'APMEP*. Vol 483. pp 505-515.

VANDEBROUCK F. (2010) Ressources et documents: le cas de la démarche expérimentale en mathématiques. Dans G. Gueudet et L. Trouche (Eds.) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.253-269). Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

VANDEBROUCK F., CAZES C. (2005) Analyse de fichiers de traces d'étudiants: aspects didactiques. *STICEF*. Vol 12. pp 229-267.

VANDEBROUCK F., DE HOSSON C., ROBERT A. (2009) Experimental devices in mathematics and physics standards in lower and upper secondary school, and their consequence on teacher practices, Dans *Actes de Conference of European society of Research in Mathematics Education (CERME 6).* Lyon, France. Janvier 2009.

VERGNAUD G. (1990) Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives. Dans S. Netchine-Grynberg (Eds.) *Développement et fonctionnement cognitifs* (pp.261-277). Paris: P.U.F.

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 10 (2-3). pp 133-169.

VERGNAUD G. (1996) Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds.) *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.174-185). Clermont-Ferrand: IREM.

VYGOTSKI L. (1934/1997) *Pensée et langage*, Paris: La dispute.

Chapitre 3 : pratiques enseignantes en situation d'usage des nouvelles technologies

Dans cette partie, nous nous intéressons au développement professionnel des enseignants et plus précisément à leurs genèses d'usage des technologies. Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre général de la théorie de l'activité spécifié à l'enseignement des mathématiques par la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes. Les concepts fondateurs de la double approche ont été développés dans les chapitres de Robert et Rogalski dans Vandebrouck (2008). Ils ne sont pas spécifiques de l'usage des technologies dans les classes et sont ici articulés, dans le cadre général de la théorie de l'activité, avec deux approches plus spécifiques de cet usage des technologies : l'approche instrumentale (Artigue 2002) et plus récemment l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2010).

Dans le cadre théorique de la double approche, le terme de pratiques désigne tout ce que les enseignants pensent, font, ne font pas, disent, taisent, avant, pendant, après la classe et hors classe (Robert et Rogalski 2002). Il s'agit donc d'une acception très large du travail de l'enseignant qui va au-delà du travail documentaire étudié avec l'approche documentaire par exemple et qui ne considère pas que ce travail documentaire constitue le cœur de l'activité professionnelle du professeur. Cependant, l'analyse des pratiques enseignantes, tout comme celle du travail documentaire, s'ancre dans l'ergonomie cognitive, prenant en compte le fait que ces pratiques se déploient dans l'exercice d'un métier qui les contraint de diverses manières. Enfin, cette analyse des pratiques se fait fondamentalement en lien avec leur but, l'apprentissage mathématique des élèves, ce qui nécessite un détour par une analyse des activités potentielles des élèves qu'elles peuvent entraîner. Les questions que la double approche permet d'aborder portent ainsi sur les régularités et les variabilités dans les pratiques enseignantes, leurs déterminants et leurs effets sur les activités des élèves.

Les méthodologies issues de la double approche sont mises en œuvre à partir de situations de classe (avec technologie ou non). Il s'agit toujours d'étudier dans un premier temps l'activité des enseignants en classe, du point de vue de l'apprentissage potentiel des élèves. Les scénarios[12] et les énoncés proposés par un enseignant à ses élèves sont recueillis et sont soumis à une analyse des tâches mathématiques, pour laquelle les outils développés dans Robert (2008, 1998) et Robert et Rogalski M. (2004) sont à nouveau mobilisés (*cf* chapitres 1 et 2). Cette analyse fait intervenir, de façon plus ou moins détaillée, les programmes, le relief des notions mathématiques en jeu (Pariès et al. 2007), en particulier les dynamiques possibles ou nécessaires entre les connaissances, l'apport potentiel

[12] Suite des contenus proposés aux élèves ainsi que la gestion correspondante, prévue a priori

des technologies pour leur apprentissage[13]… Il s'agit d'une conversion du scénario et des énoncés en « itinéraire cognitif » proposé aux élèves. Cette étude se poursuit à partir de transcriptions (et/ou vidéos) recueillies pendant des observations en classe. Il s'agit d'analyser le déroulement de séances, la gestion de classe de l'enseignant, ses conséquences sur les activités mathématiques possibles des élèves, à travers notamment l'étude des aides (orales ou écrites, de type procédural, à visée constructive, ou intermédiaires – et le moment par rapport à la réalisation de la tâche en jeu) qu'il apporte aux élèves durant les séances. Cette analyse est pilotée par la mise en regard de l'itinéraire cognitif proposé aux élèves et leurs activités possibles observées (a minima et a maxima) compte tenu du déroulement.

L'accès aux pratiques du professeur, à partir de l'observation de son activité en situation de classe, n'est possible que dans un deuxième temps. Une recomposition des activités possibles des élèves permet d'alimenter une description des pratiques d'un enseignant selon deux composantes : une composante cognitive, qui rend compte essentiellement des choix de scénarios et d'énoncés a priori et une composante médiative, qui rend compte des choix lors des déroulements. Cette connaissance des pratiques d'un enseignant s'enrichit bien sûr de plusieurs études de l'activité en situation de classe, en particulier des situations d'enseignement avec des technologies s'il y a lieu ; mais l'hypothèse forte, confirmée par de nombreuses recherches, d'une stabilité des pratiques enseignantes et donc d'une récurrence dans les choix à un certain niveau, permet de s'affranchir raisonnablement d'un recueil exhaustif de données.

Des renseignements plus globaux sur les pratiques, notamment ce qui les contraint et qui provient du contexte professionnel (le métier), qui peut aussi avoir des conséquences sur les activités possibles des élèves, ne se recueillent pas seulement en classe mais plutôt par des questionnaires et des entretiens. Ils sont pris en compte sous forme de deux autres composantes qui traduisent ces contraintes : la composante sociale et la composante institutionnelle des pratiques. Enfin, l'expression des singularités enseignantes est prise en compte par la composante personnelle des pratiques, liée aux connaissances, aux conceptions de l'enseignant, à sa représentation des modes d'apprentissage des élèves et à son expérience personnelle.

La stabilité des pratiques est tout à la fois un postulat dans la double approche didactique et ergonomique qu'un résultat d'un ensemble de travaux portant sur les pratiques enseignantes, avec ou sans technologie. Cette stabilité se traduit par la cohérence entre les cinq composantes des pratiques. Les pratiques sont aussi complexes, c'est-à-dire en particulier non réductibles à la juxtaposition des cinq composantes. Stabilité, cohérence et complexité se conjuguent toutefois à

[13] Ici des concepts issus de l'approche instrumentale telle qu'elle a été développée en France peuvent être mobilisés.

l’évolution de l’activité sur le long terme, au fil des situations d’enseignement avec les élèves, en particulier lorsque des nouvelles technologies ou nouveaux outils sont introduits dans les pratiques du professeur. L’activité évolue bien avec le temps mais c’est toujours le même sujet qui enseigne, indépendamment des situations spécifiques (type de séance, traditionnelle ou avec technologie, niveau d’enseignement…) avec des régularités afférentes sur les activités et les apprentissages potentiels de ses élèves. Ce sont ces évolutions et ces régularités, qu’il nous intéresse, avec la double approche, de caractériser en terme d’effets potentiels sur les élèves.

Les évolutions de l’activité sont cependant bien modélisées dans l’approche instrumentale sous forme de genèses instrumentales. L’articulation du concept de genèse instrumentale avec la double approche se justifie, d’une part, par le besoin d’étendre cette dernière vers les environnements technologiques et d’autre part, par la cohérence que peut assurer le cadre plus général de la théorie de l’activité. En effet, la prise en compte de la dialectique productif-constructif dans le cadre de la théorie de l’activité permet de dépasser les situations d’usage des technologies, ce qui amène à mieux prendre en compte l’ensemble du contexte de l’activité enseignante et donc permet de « remonter » aux pratiques. En particulier, les genèses instrumentales sont vues dans notre travail comme un éclairage des genèses d’usages, spécifique aux interactions entre les enseignants et les artefacts technologiques.

Les récents développements des recherches sur les pratiques enseignantes dans le cadre de la double approche et de l’approche instrumentale (ou documentaire, Gueudet et Vandebrouck, 2011) ont aidé à préciser, au sein de la théorie de l’activité, la dialectique entre pratique et activité : la double approche déclare en effet viser l’étude des pratiques du professeur à partir de l’étude de diverses formes de son activité en situation, tandis que l’approche instrumentale (ou documentaire) permettent un focus sur l’activité du professeur en situation d’usage des technologies (ou de ressources), sa structure et ses évolutions. Avec la double approche, ces évolutions intéressent le chercheur en termes d’aspects cognitifs et médiatifs, pour les évolutions qu’elles induisent in fine dans l’activité potentielle des élèves.

L’articulation des approches au sein de la théorie de l’activité nous permet donc d’une part de prendre en compte pour l’étude des genèses d’usage des technologies la dialectique complexe entre stabilité des pratiques à un certain niveau et évolutions de l’activité en situation, d’autre part de prendre en compte le versant externe des genèses d’usage, qui correspond aux évolutions de l’activité productive des professeurs au fil des séances TICE et le versant interne indissociable des genèses lié à l’activité constructive qui accompagne ces évolutions.

Par ailleurs, pour accéder au niveau des pratiques à la variabilité et aux évolutions individuelles de l'activité, il est indispensable de prendre en compte trois niveaux ou échelles d'étude. Ces trois niveaux sont liés d'une part à la temporalité de l'action, introduite dans le chapitre 2 (versant activité des élèves), et d'autre part à l'échelle de l'activité prise en compte. Ainsi, trois niveaux d'organisateurs des pratiques sont introduits (Robert 2008) :

- Le niveau micro se révèle dans les automatismes du professeur, aussi bien pour la préparation que dans la gestion des séances, ou dans le discours (ce qui n'est pas préparé). Ce niveau est à se rapprocher du temps court de l'action et du niveau des opérations en théorie de l'activité. Cependant, la construction de ce niveau micro des pratiques enseignantes (constitution des schèmes d'actions ou des schèmes d'opérations) ne peut se faire que sur le temps long de l'action.
- Le niveau local est celui des actions au quotidien. Autrement dit, c'est le niveau correspondant au temps moyen de l'action, là où se rencontrent les préparations et les improvisations, le niveau de toutes les adaptations du professeur.
- Le niveau global est celui des projets, des scénarios, des préparations et correspond au temps long de l'action.

Nous développons actuellement avec Abboud-Blanchard, une hypothèse selon laquelle un enseignant qui débute avec l'utilisation d'un outil technologique ne dispose pas suffisamment d'automatisme et de routine à cet usage, ni de vision globale sur l'organisation d'un enseignement cohérent intégrant cet outil. De ce fait, en reprenant Robert (2008) dans le cas des enseignants débutants, le niveau local occupe toute la scène faute de suffisamment de relais aux autres niveaux micro et global. Il y aurait une surcharge au niveau local. Dans notre cas d'intégration des technologies, pour y faire face, plusieurs mouvements se mettraient en place :

- un mouvement allant du micro vers le local et traduisant un recours aux pratiques habituelles, hors technologies, pour le contexte d'usage des technologies ;

- des mouvements allant d'une part du niveau local vers le niveau global et d'autre part du local vers le micro traduisant tous deux des genèses d'usage des technologies.

Nous développons en parallèle l'hypothèse complémentaire qu'un enseignant chevronné, dont la pratique n'est pas soumise à une quelconque perturbation (par l'introduction de technologies par exemple), dispose d'énormément d'automatismes (niveau micro) et possède une vision globale de son enseignement (niveau global) qui pilotent sa pratique enseignante au niveau local et la rendent très stable, au-delà des contenus enseignés ou des classes en présence.

Dans le premier paragraphe, nous mettons à l'épreuve cette deuxième hypothèse. Nous étudions les pratiques enseignantes d'enseignants chevronnés. Nous analysons plus particulièrement l'utilisation du tableau noir, sur plusieurs contenus et avec plusieurs niveaux de classe. L'utilisation du tableau est non seulement très stable chez les enseignants mais révélatrice des automatismes et des projets. La terminologie de « logiques d'actions » est introduite pour décrire les pratiques au niveau local, pilotées chez des enseignants expérimentés par le niveau micro (Robert et Vandebrouck 2003).

Dans les paragraphes suivants, nous étudions l'hypothèse principale d'une surcharge au niveau local chez les professeurs intégrant les technologies nouvelles et de plusieurs mouvements entre les niveaux dont certains caractérisent des genèses d'usages de ces technologies. Dans le deuxième paragraphe, nous traitons des genèses d'usage des bases d'exercices en ligne (BEL) chez les enseignants. Dans le troisième paragraphe, plus détaillé, nous traitons de genèses d'usage plus complexes relatives aux technologies ouvertes.

1. Les recherches sur les pratiques des professeurs expérimentés : le pilotage de la gestion au niveau local par le niveau micro des automatismes

Dans nos recherches sur l'utilisation du tableau noir chez les enseignants expérimentés, nous avons voulu décrire précisément la stabilité des pratiques. Ceci doit être vu comme un préalable à l'étude des perturbations que peut amener l'usage des technologies dans sa classe par un professeur expérimenté. Nous réinterprétons ici les résultats obtenus dans Robert et Vandebrouck (2003) et Vandebrouck (2002). Dans ces articles, nous cherchions à savoir quelle peut être la nature des choix invariants (du côté de la composante cognitive et/ou de la composante médiative), quel niveau (micro, local ou global) il convient d'adopter pour les mettre en évidence et jusqu'à quel point ces choix peuvent être indépendant des contenus mathématiques enseignés et des élèves en présence. Nous cherchions également à formaliser la stabilité par des éléments de cohérence mis en lumière par l'utilisation que font les enseignants de leur tableau au niveau local.

Nous avons défini tout d'abord deux pôles de gestion de la classe, entre lesquels se situaient beaucoup d'enseignants observés : la classe « lieu de savoir » et la classe « lieu de travail ». Une classe est un lieu de savoir quand le professeur expose un savoir et que l'activité principale des élèves est l'écoute. Les élèves peuvent se voir proposer des tâches mathématiques complexes et potentiellement riches en termes d'apprentissage. Cependant la gestion organisée par l'enseignant ne permet aux élèves d'avoir comme seule activité pendant la classe que celle de le suivre l'enseignant dans sa résolution des tâches. La classe est par contre un lieu de travail lorsque les élèves s'investissent réellement pendant un temps suffisamment long, variable selon les niveaux, dans une activité mathématique qui n'est pas entièrement guidée par l'enseignant et qui ne se réduit pas à une succession d'applications immédiates de connaissances explicitées. C'est à la fois la grande difficulté des alternances entre les lieux de savoirs et les lieux de travail (déjà signalée dans de nombreux travaux[14]) et leur contribution, a priori très différente, aux activités potentielles des élèves, qui nous amènent à retenir ces deux types de lieux et à les qualifier de pôles. Entre les deux pôles, divers moments se repèrent, pendant lesquels les activités des élèves sont plus confuses. Ce peut être des moments de cours émaillés de petites questions, très ponctuelles, qui permettent à quelques élèves de participer, ou des exercices pendant lesquels les interventions ininterrompues de l'enseignant découpent et orientent fortement le travail des élèves, voire le réduisent à une suite d'applications immédiates de connaissances explicitées. Seule une étude fine peut permettre de situer une séance par rapport aux pôles précédents.

Nous avons ensuite proposé trois types d'utilisation du tableau noir, observés dans les classes : le tableau « lieu de savoir », le tableau « brouillon public » et le tableau « lieu d'écrit intermédiaire ». Ces catégories ont été inspirées par les types de gestions de classe mais guidées également par les activités très différentes qu'elles peuvent induire chez les élèves. Nous avons montré que lorsque le tableau est davantage utilisé dans sa fonction « brouillon public », permettant de donner à voir un processus plus qu'un produit, la classe semble être plutôt un « lieu de travail », au sens où les élèves ont une certaine initiative pendant un certain temps, sans un guidage strict de l'enseignant. La validation de l'écrit d'un élève l'emporte alors sur l'institutionnalisation. Les accompagnements du professeur se font en principe après les activités des élèves, qui les induisent et les organisent en partie (aides plus constructives). Les temps de production des élèves en classe ne sont pas des pertes de temps. Si le tableau est davantage utilisé dans sa fonction « lieu de savoir », à recopier en général, à mémoriser éventuellement, permettant de donner à voir un produit fini plutôt qu'un processus, la classe semble plutôt organisée comme un « lieu de savoir », avec des élèves très guidés tout le temps (aides plutôt procédurales). C'est l'enseignant qui écrit ou dicte ce qui est au tableau, à quelques exceptions près (l'élève peut répondre seul à une tâche simple et isolée). L'institutionnalisation l'emporte sur la validation de l'écrit (il n'y a pas ou peu besoin de validation puisque c'est l'enseignant qui est à l'origine de l'écrit). Les accompagnements se font avant les activités des élèves, cela réduit les risques d'erreurs, les pertes de temps qui pourraient être associées à un temps de production plus long.

[14] Marc Legrand dit par exemple qu'il est difficile de remettre les élèves à penser « à la première personne » après une phase de cours.

Ce qui est apparu dans la recherche est la relative stabilité de l’utilisation du tableau, traduisant donc un type de gestion de classe privilégié par les enseignants, au-delà des contenus enseignés et des classes. L’utilisation du tableau par chaque enseignant s’avère ainsi assez uniforme, reproduite, et elle ne semble pas improvisée. Elle semble bien révéler des choix réguliers, qui se répètent et qui présentent une part d’automatisme, par delà les séances et les types de tâches. En outre, nous ne rencontrons jamais dans nos recherches les deux pôles de gestion de classe chez un même enseignant, y compris en suivant un même enseignant sur plusieurs séances, dans plusieurs classes.

Par exemple, nous avons montré comment, chez un professeur confirmé (proche de la retraite), la gestion de séance (et en particulier l’utilisation du tableau) est stable quelque soit le niveau enseigné (seconde ou première S) et quelque soit le contenu mathématique en jeu. Indépendamment des tâches qu’il propose, il organise systématiquement la même gestion de classe, articulée avec un tableau « lieu de savoir ». La gestion au niveau local est ainsi comme verrouillée par le niveau micro des automatismes.

En élargissant le point de vue à partir de l’utilisation du tableau chez les enseignants observés, nous sommes amenés à dégager des logiques d’actions chez les enseignants, cohérentes avec les utilisations stables du tableau. Ces logiques d’action, transversales aux composantes cognitives et médiatives, traduisent le pilotage du niveau local par le niveau micro des automatismes.

Par exemple, un autre enseignant tableau « lieu de savoir » considère que l’idée de modèle est importante : les élèves doivent avoir un modèle de résolution d’exercice au tableau ; pour chaque exercice, il existe un modèle de résolution à trouver, c’est à dire un enchaînement de sous-tâches à identifier, à associer chacune à un point du cours (une formule par exemple) puis à résoudre bien sur. En outre, il s’agit d’un enseignant qui propose des tâches complexes à ces élèves, à travers les questions d’exercices qu’il pose, et qui souhaite associer les élèves au maximum à la résolution. Alors nous retrouvons de façon récurrente chez cet enseignant la logique d’action suivante :

1) une tâche complexe est proposée aux élèves, c’est-à-dire une tâche comportant des mises en fonctionnement des connaissances non immédiates ;

2) une interaction orale est mise en place pour associer les élèves mais elle est fortement guidée par l’enseignant pour faire émerger de façon propre les sous-tâches, les savoirs décontextualisés, par exemple les formules du cours, qui peuvent ainsi être « couchées », au fur et à mesure, sur le tableau lieu de savoir ;

3) pour chacune des sous-tâches isolées, les élèves effectuent la sous tâche et un élève passe au tableau. Comme la tâche est isolée, même souvent d’application immédiate, il n’y a pas de « dérapages » au tableau, qui reste ainsi lieu de savoir. Ce ne sont pas les explications et les méthodes qui structurent ce lieu de savoir mais les choix de méthodes, les formules puis les résultats.

En fait, l'ensemble des données de notre recherche pourrait indiquer que même si des marges de manœuvres personnelles existent, beaucoup d'enseignants expérimentés souhaitent réellement installer en classe des lieux où travaillent les élèves mais compte tenu de contraintes (institutionnelles et sociales notamment) ils ont des difficultés à faire de la classe un vrai « lieu de travail » articulé à un « lieu de savoir ». La pauvreté relative des lieux de travail et la difficulté des alternances seraient alors prises en charge par l'organisation en classe d'un lieu intermédiaire qui peut être qualifié de lieu d'interactions immédiates (que nous lisons comme une sorte d'adaptation) associée à un tableau lieu de savoir. A ce lieu d'interactions immédiates appartiendraient les cours dialogués souvent observés dans les logiques d'actions. L'activité précise des élèves ne serait alors pas vraiment maîtrisée. Cette gestion, peut-être porteuse de différenciations entre élèves, serait compensée par l'existence cohérente du tableau lieu de savoir. Ce lieu de savoir garantirait au moins par ses spécificités le fait que tous les élèves aient accès à la connaissance qui s'élabore en classe lors de ces interactions.

Ces recherches, basées sur différents enseignants, étudiés pendant une ou plusieurs séances, ont ainsi amené l'idée, développée par la suite dans Pariès, Robert et Rogalski (2008) que la stabilité porte plutôt sur la composante médiative des pratiques enseignantes, fortement reliée à des automatismes au niveau micro. Ceci ne prédispose pas à des changements trop locaux des pratiques, dans une perspective de formation continue.

2. L'exemple d'enseignants intégrant les bases d'exercices en ligne dans leurs pratiques

Dans Abboud Blanchard, Cazes et Vandebrouck (2007, 2008, 2009) nous étudions les genèses d'usages de Bases d'exercices en Ligne (BEL) chez des enseignants de mathématiques en classe de seconde. Ce sont ces résultats que nous reprenons ici.

Les genèses d'usages des BEL sont en premier lieu contraintes par divers déterminants qui relèvent de la situation institutionnelle ou qui sont propres à l'usage d'une BEL. Par exemple, les enseignants des lycées professionnels ont tous choisi Paraschool, une base d'exercices spécifiquement affichée comme adaptée à ce type d'établissement, ce qui traduit les contraintes institutionnelles. D'autres déterminants externes influent sur l'organisation que les enseignants retiennent pour les séances BEL et donc sur les genèses. Les usages privilégient par exemple toujours les séances à effectif réduit en salle informatique en tirant parti de l'organisation pédagogique propre à ce niveau (cours en classe entière, modules en demi-classe, aide individualisée avec une partie de la classe). Enfin, les contenus proposés dans le cadre de cette aide individualisée concernent uniquement des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition.

L’introduction des niveaux d’organisation des pratiques nous permet une description (partielle) des évolutions (plus ou moins lentes) que nous constatons. S’agissant d’enseignants expérimentés introduisant dans leur pratique un nouvel outil technologique, tout ce passe comme si les séances au niveau local étaient pilotées par des automatismes déjà construits dans la pratique habituelle. Par exemple, une enseignante, Flore, décline ses aides aux élèves différemment selon qu’ils sont plus ou moins en difficulté, renforçant une méthode si l’élève est vraiment en difficulté, enrichissant son capital de méthodes disponibles s’il est plus à l’aise. Cependant, lors d’un entretien, elle semble ne pas être consciente de cette aide différentiée ce qui fait penser qu’il s’agit là d’une caractéristique de la composante médiative de sa pratique. De la même façon, Diane, une autre enseignante observée, s’efface plus que tous les autres enseignants devant la BEL ce qui correspond là encore à une caractéristique de sa composante médiative très liée à sa composante personnelle. Le rôle du professeur dans sa pratique est d’aider l’élève à acquérir une bonne méthode pour lui permettre d’être autonome face à la machine.

Ensuite, il y a un mouvement d’évolution du projet global d’enseignement intégrant la possibilité d’un usage au quotidien des technologies (on peut évoquer une évolution du local vers le global). Le mouvement majeur que l’on observe assez rapidement est une évolution de l’activité productive de l’enseignant au niveau des scénarios et de la gestion prévue a priori : par exemple de nouveaux équilibres systématiques s’observent, entre séances machine et séances papier/crayon, entre phases de travail individuel et phases de travail collectif, ou encore dans les rapports « connaissances anciennes/ connaissances nouvelles » mises en jeu lors de ces séances. Les enseignants développent aussi assez rapidement l’usage de la trace papier chez leurs élèves lors d’activités avec les BEL et ils s’y tiennent par la suite. Ils insistent assez vite pour que les élèves utilisent une feuille « pour garder une trace » ; certains évoluent vers l’utilisation par les élèves d’un cahier d’informatique. Enfin, l’insertion des activités BEL dans les activités ordinaires de la classe peut aussi se traduire dans l’évaluation : la plupart des enseignants qui développent une utilisation significative des BEL intègre des exercices analogues dans les contrôles.

En parallèle à ce mouvement du local vers le global, il y a un développement d’automatismes liés à l’usage des technologies mises en œuvre (du local vers le micro). Les enseignants utilisant les BEL en classe de seconde établissent rapidement une utilisation des BEL dans des séances d’aide individualisée dans le but de venir en aide aux élèves en difficulté et de gérer l’hétérogénéité dans la classe. Cette utilisation se stabilise au cours de l’année donnant lieu à des automatismes liés à ce type d’utilisation : par exemple le fait de s’adresser en cours de séance presque exclusivement à un ou deux élèves à la fois et non à la classe entière comme c’est le cas dans les séances classiques d’exercices. Un autre exemple concerne l’action de l’enseignant quand il arrive pour aider un élève : il fait automatiquement un bilan diagnostic de la situation pour comprendre l’itinéraire qui a été suivi par l’élève avant qu’il demande l’aide.

Cependant, des variabilités observées dans les études de cas semblent directement liées aux caractéristiques individuelles des enseignants et donc aux composantes personnelles. Par exemple, Flore, est associée au projet Région et a été très active au sein du groupe IREM qui pilote la recherche. Les genèses d’usage constatées chez elle, sont en accord avec son parcours personnel, sa participation au groupe IREM et le suivi d’une formation de master professionnel qui l’a sensibilisé au problème de prise en main des technologies en général. Lors d’un l'entretien, elle envisage de réorganiser l'ensemble de ses séances BEL, en commençant par exemple par des séances de familiarisation avec les BEL. Cette évolution spécifique chez Flore est à lire en fonction d'éléments de sa composante personnelle car elle dépasse largement l’utilisation des BEL mais guide son parcours professionnel. Elle résulte certainement d’un élément fort de sa composante personnelle : la volonté d’enrichir sa pratique enseignante, éventuellement hors de son lieu de travail. Ceci représente un déterminant interne des genèses d’usage qui n’était pas initialement lié aux technologies mais qui s’est développé dans le contexte de leur usage.

3. L’exemple de Clarisse et Sophie intégrant des technologies ouvertes dans leurs classes

Nos dernières recherches concernent l’intégration des technologies ouvertes dans les classes. Sophie et Clarisse sont des enseignantes de lycée favorisé parisien, que nous avons accueillies au sein d’un groupe de l’IREM Paris Diderot sur la mise en place de l’épreuve pratique au baccalauréat S en 2007. Cette nouvelle épreuve vise à faire développer en classe des démarches expérimentales chez les élèves, par le biais d’un usage des technologies (*cf* chapitre 2). Les enseignantes doivent mettre en place des TP informatiques avec leurs classes de terminale S, ce qu’elles n’ont jamais fait ou jamais fait de façon régulière. Les genèses d’usage des technologies ouvertes peuvent alors être étudiées. Les résultats de ce paragraphes sont publiés partiellement et de façon complémentaire dans Vandebrouck (2010) et dans Gueudet et Vandebrouck (2011). Nous restituons ici une vision complète des résultats.

Les détails dans ce paragraphe permettent de mettre en relation cette question des genèses d’usage des technologies avec des questions liées aux effets sur les élèves : « quelle est l’activité mathématique des élèves pendant les séances de préparation à l’épreuve pratique ? En particulier comment les élèves peuvent-ils entrer dans la démarche expérimentale ? Comment les enseignantes organisent t elles simultanément l’entrée dans cette démarche et les genèses instrumentales des élèves ? Quelles sont les variabilités et les régularités, avec leurs effets sur les élèves ? Quelles sont les évolutions sur le temps long dans les pratiques des enseignantes ? Peut-on enfin comprendre ces pratiques et leurs évolutions avec des déterminants qui peuvent les contraindre (y compris des déterminants personnels) ? »

Les composantes personnelles des pratiques des deux enseignantes, et leurs liens avec des caractéristiques des composantes cognitives et médiatives, sont tout d'abord renseignées par des réponses à un questionnaire qui a été proposé lors de l'année 2007-2008, à propos des pratiques antérieures au démarrage du groupe IREM et actuelles. Ces réponses sont complétées par des entretiens avant et après les séances de TP observées et quelques enregistrements ou notes sur les échanges au sein du groupe IREM pendant les deux années d'observation. Un profil des deux enseignantes est ainsi dressé, traduisant les composantes personnelles de leurs pratiques et leurs imbrications avec les composantes cognitives et médiatives. Dans ce profil, les caractéristiques de la composante cognitive retenues et pertinentes pour notre problématique sont renseignées dans le questionnaire par des questions du type « quels usages faites vous des technologies en relation avec votre cours de mathématiques », « citer trois mots qui définissent le mieux ce qu'est la nouvelle épreuve pratique »… Les caractéristiques de la composante médiative sont mieux renseignées par les entretiens, les commentaires généraux des enseignantes et les questions du type « vous arrive-t-il d'être en difficulté avec des élèves pendant une séance avec technologies ? », « comment définiriez vous l'autonomie des élèves pendant une séance avec technologies »… L'étude des composantes institutionnelles et sociales, respectivement affectées par l'injonction institutionnelle de préparer les élèves à l'épreuve pratique et infléchies par la participation au groupe IREM, ne sont pas centrales.

3.a Des éléments sur les composantes personnelles

Sophie et Clarisse ont deux profils assez différents quant à leur utilisation des technologies, en lien avec les mathématiques et leur enseignement, ainsi que vis-à-vis de la démarche expérimentale en classe.

Avant la mise en place de l'épreuve pratique, Sophie utilisait déjà fréquemment les technologies dans ses classes, de la Seconde à la Terminale, même si ce n'était jamais en salle informatique : il pouvait s'agir ou bien de les utiliser en vidéo projection dans sa salle de classe traditionnelle, ou bien de faire utiliser aux élèves leurs calculatrices graphiques et/ou formelles (i.e. intégrant un logiciel de calcul formel). Clarisse, quant à elle, utilisait de manière plus occasionnelle les technologies, le plus souvent en salle informatique et uniquement avec sa classe de Terminale S.

Concernant la mise en place d'une démarche expérimentale, avant l'introduction de l'épreuve pratique au baccalauréat, Sophie explique qu'elle faisait déjà adopter une telle démarche à ses élèves de manière occasionnelle, tandis que Clarisse dit ne jamais avoir proposé cette démarche dans ses classes. Selon

Sophie, la démarche expérimentale est liée à des activités telles que : poser le problème, modéliser, expérimenter, conjecturer, confirmer sa conjecture avec des outils technologiques et démontrer, tandis que Clarisse intègre les technologies dès le départ : traduire le problème avec un logiciel, observer, conjecturer, tester des conjectures avec le logiciel et enfin valider par une démonstration de ces conjectures.

Les deux enseignantes ont donc deux profils a priori assez différents, qui semblent liés à leur différence d'expérience dans le temps à la fois avec les technologies et avec une démarche expérimentale. En lien avec sa composante cognitive, Sophie justifie l'usage des technologies par des arguments plus orientés vers l'activité des élèves : possibilité de réaliser des figures animées, de faire des calculs longs et pénibles, de faire travailler sur des conjectures. La fréquentation des technologies, plus faible pour Clarisse, se ressent dans les intérêts qu'elle voit à leur usage en lien avec son enseignement : préparer des séances, préparer des séances informatiques, préparer une figure ou une feuille de calcul à projeter. Une potentialité plus grande de la démarche expérimentale en terme d'activité des élèves se retrouve dans les propos de Sophie : problématiser et modéliser *versus* traduire ; confirmer sa conjecture et démontrer *versus* tester.

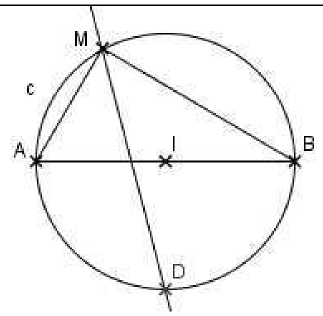
Pour compléter les renseignements fournis par les questionnaires, nous avons demandé aux enseignantes, au début de l'année 2008-2009, c'est-à-dire à l'issue de la première année d'existence du groupe IREM, un « bon » exemple de sujet de TP amenant à une démarche expérimentale des élèves avec des TICE. Sophie a proposé le sujet suivant, qui nécessite l'usage du tableur :

Sophie, exemple de sujet de TP proposé en réponse à la demande des chercheurs

Soit k un entier naturel, déterminer les valeurs de k pour lesquelles $A_k=2^k-1$ est divisible par 7.

Dans cet exercice, nous analysons que les élèves n'ont ni à poser le problème, ni à modéliser, mais bien à traduire le problème dans un tableur, ce qui semble en décalage avec la vision déclarée de Sophie quelques mois auparavant. Cette traduction amène cependant les élèves à émettre la conjecture que les valeurs de k sont les multiples de 3. Il n'y a pas possibilité de le confirmer plus avant avec le tableur, mais la connaissance de cette conjecture permet d'initier une démonstration par récurrence, plus facilement peut-être que sans l'outil tableur.

Le sujet proposé par Clarisse, même s'il n'est pas pour une classe de Terminale, mais pour une classe de Seconde, ne reflète quant à lui plus du tout ce qu'elle déclarait voir dans une démarche expérimentale au moment du questionnaire :

Clarisse, exemple de sujet de TP proposé en réponse à la demande des chercheurs Tracer deux points A et B, le cercle (C) de diamètre [AB] et un point M du cercle. Tracer la bissectrice de l'angle AMB. Le point M parcourt un demi cercle d'extrémité A et B. 1) Que peut-on dire de la bissectrice ? 2) La bissectrice semble passer par un point fixe. Appeler D ce point. Proposer une définition de D indépendante du point M 3) Démontrer que la bissectrice de l'angle AMB passe toujours par D (on pourra considérer le point E symétrique de D par rapport à I).	

Dans l'exercice de Clarisse, l'activité de traduction du problème dans le logiciel est réduite à une activité de reproduction de la figure déjà donnée dans l'énoncé. Les activités de conjecture et d'observation sont appauvries par le fait que le point D soit donné. La conjecture est présente dans la fin de la question 2), mais il s'agit seulement de reconnaître D comme intersection de la médiatrice de [AB] et du cercle. Ceci peut se faire grâce à la figure donnée, sans l'outil TICE, de même que la démonstration de la question 3.

Ces deux énoncés, proposés par Sophie et Clarisse, montrent pour les deux enseignantes des évolutions sur le plan cognitif entre les réponses au questionnaire et ce qu'elles considèrent comme un « bon » exemple à l'issue d'une année. En effet, Sophie n'inclut dans son exemple qu'une partie des activités possibles pour des élèves, parmi celles qu'elle voyait initialement dans une démarche expérimentale. Clarisse s'éloigne encore plus nettement de ses réponses au questionnaire : pas d'activité de traduction dans le logiciel, observation limitée, pas de possibilité de test d'une conjecture... éloignant par là même les activités possibles de celles d'une démarche expérimentale.

Du côté de la composante médiative, l'analyse des questionnaires, les commentaires généraux des enseignantes sur leur pratique ainsi que les réponses lors d'entretiens avant ou après les séances observées montrent encore des différences entre les deux enseignantes. Clarisse signifie de manière récurrente dans ses propos qu'elle a une tendance à trop simplifier les tâches qu'elle propose à ses élèves, soit par la forme des énoncés d'exercices, soit par les aides qu'elle leur fournit pendant les déroulements. Par exemple, dans l'un de ses commentaires à propos d'énoncés de TP pour des classes de Seconde, elle signale : « *Ce sont des TP pour les Secondes, pour démarrer avec GeoGebra, ils sont très détaillés comme à mon habitude…* ». Dans ses réponses au questionnaire et dans ses commentaires après un TP en avril 2008, elle exprime toujours sa difficulté à ne pas tomber dans cette simplification des tâches : « *ce qui m'a paru difficile à moi, c'est de trouver des indications à donner aux élèves pour les mettre sur la voie sans leur dire tout* ». Sophie fait moins de commentaires sur les aspects médiatifs de sa pratique. Mais à propos de l'autonomie des élèves, elle explique que, quand les élèves sont bloqués, « *c'est dans leur démarche, à cause des problèmes informatiques ou dans la compréhension* », ce sur quoi elle peut les aider : « *Ce n'est pas sur le problème mathématique lui-même* ». Les aides de Sophie sont plus portées sur la démarche, l'informatique et la bonne compréhension des énoncés alors que les aides de Clarisse peuvent être plus procédurales, sans pour autant, comme elle l'explicite, tout dire aux élèves.

3.b Évolution de l'activité des deux enseignantes liée à la préparation et au déroulement des séances de TP

Sophie et Clarisse ont commencé à préparer leurs élèves de classes de terminale à l'épreuve pratique quelques mois après la rentrée 2007, au moment où les réunions du groupe IREM ont commencé. Nous les avons suivies au cours de l'année 2007-2008 ainsi que dans le début de l'année scolaire 2008-2009. Les deux années, l'organisation globale de leur enseignement en classe de terminale S a été la même et a été très proche d'une enseignante à l'autre, traduisant le pilotage global de la pratique par des composantes institutionnelle (contraintes des programmes, des manuels, d'une cohérence dans les mathématiques enseignées) et sociale (habitudes entre collègues, échanges au sein du groupe IREM sur les progressions) importantes.

Au cours des deux années, l'étude des suites et le langage des limites sont introduits assez tôt en septembre ou octobre puis la fonction exponentielle et la méthode d'Euler pour la résolution de l'équation différentielle $y'=y$ sont traitées aux mois de novembre et décembre ; ces deux domaines mathématiques donnant lieu pour les enseignants à la préparation de séances de TP avec le tableur. Ensuite le travail sur les fonctions, *exp* et *ln* notamment, est l'occasion d'énoncés de TP avec le logiciel Géogébra. Enfin, en fin d'année, l'approche de l'épreuve de baccalauréat impose aux enseignantes une revisite de toutes les notions, les enseignantes prenants appuis en 2007-2008 sur des sujets zéro pour l'épreuve pratique de juin 2007 ou des sujets d'annales de 2007 et en 2008-2009 sur des sujets d'annales de 2008.

Pour simplifier notre chapitre, nous étudions l'évolution de l'activité des deux enseignantes en distinguant ces trois grandes périodes de leurs deux années scolaires : introduction du tableur, introduction de Géogébra, mise en œuvre de sujets de type bac. Pour une raison de longueur, la première période des deux années est plus précisément analysée que les deux suivantes.

Deux premiers TP tableur de Sophie en 2007-2008 et l'évolution en 2008-2009

Sophie propose comme premier énoncé de TP en 2007 à ses élèves de terminale S un sujet qui lui a été présenté lors d'une conférence de Jacques Lubczanski, « à la mode hongroise », qui propose l'étude de la suite (W_n) définie comme le quotient de la suite (U_n) de la somme des entiers par la suite (V_n) de la somme des carrés d'entiers. Ce sujet ne met en fonctionnement que des connaissances de premières S et Sophie est sans doute rassurée en commençant avec ce premier sujet. En effet, ce sujet, qui est repris maintenant dans une brochure « maths entre écran et papier », est accompagné d'indications pour l'enseignant, notamment les objectifs en termes de contenu mathématique et une étude théorique sur l'apport de ce sujet pour une démarche expérimentale dans la classe. Les questions du sujet, repris telles quelles par Sophie, commencent comme suit :

A) Mise en place du calcul

1) *Ouvrez une nouvelle feuille de classeur*. *Créer 5 colonnes intitulées n, u, n², v et w*

2) *La ligne sous les entêtes correspondra à n=1 : saisir les valeurs correspondantes dans chacune des colonnes*

3) Dans la ligne suivante, saisir les formules qui permettront d'obtenir par recopiage vers le bas les valeurs successives de n, Un, n², Vn et Wn

B) Observations et Conjectures

(…)

2) Quelle nouvelle colonne pouvez-vous créer pour mettre à l'épreuve cette conjecture ? Faites-le !

3) A quelle formule Wn=f(n) conduit votre conjecture précédente ? Créer une colonne intitulée f(n) où vous saisirez la formule permettant d'obtenir les valeurs successives de f(n) par recopiage vers le bas. Les valeurs obtenues dans la colonne f(n) coïncident-elles avec celles obtenues pour Wn ?

C) Travail théorique

(…)

Il y a un effort dans ce TP pour ménager l'entrée en activité des élèves qui a priori découvrent l'usage du tableur avec cette première séance. Cependant la question 3) peut être analysée comme difficile. Dans cette question, il y a d'une part une adaptation mathématique liée au passage des définitions explicites données des suites (U_n), (V_n), (W_n) en fonction de *n* à des expressions par récurrence et d'autre part une mise en fonctionnement de la connaissance tableur de recopie vers le bas. Cette fonctionnalité tableur est liée aux mathématiques puisqu'elle porte en elle le maniement d'une suite définie par récurrence. Dans les commentaires après la séance, Sophie signale d'ailleurs que cette question est celle qui a posé les premières difficultés majeures aux élèves et qu'il faudrait la scinder en deux sous-questions.

L'activité d'expérimentation et de conjecture du fait que $W_n = (2n+1)/3$ est organisée et permise aux élèves dans la partie B) du sujet. Cependant, là encore, cette activité est accompagnée à la fois sur le plan mathématique et sur le plan instrumental. Il reste des activités de traduction des observations faites sur le tableur en expression algébrique, notamment exprimer W_n en fonction de n, ce qui participe de l'activité expérimentale avec un tableur. Enfin, la partie théorique est également accompagnée en balisant deux méthodes pour établir l'expression explicite de (V_n) et (W_n) mais il reste là encore de l'activité mathématique à la charge des élèves.

Finalement, Sophie s'est laissée guidée vers un sujet intéressant pour démarrer l'année de terminale avec le nouvel outil tableur : les connaissances mathématiques utiles sont des connaissances anciennes mais la démarche expérimentale est bien en germe dans ce sujet. En outre, la genèse instrumentale est réfléchie aussi puisque seule la fonctionnalité de recopie vers le bas, associée à la notion de suite définie par récurrence est utilisée.

Le deuxième sujet proposé par Sophie est inspiré d'un sujet d'annales de l'épreuve pratique 2007 (il s'agit du sujet 21). Ce sujet 21 tel qu'il a été proposé au baccalauréat est le suivant :

Soit l'équation différentielle y'=-2y. On admet que la fonction f solution de cette équation définie sur R et vérifiant f(0)=1 est la fonction f telle que f(x)=exp(-2x). On cherche à comparer f(1) aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas. On se place sur l'intervalle [0,1] en prenant un pas h égal à 1/n…

(…)

$x_0=1$, $y_0=1$ et pour tout k, $x_k+1 = x_k + 1/n$ et $y_k+1=(1-2/n)y_k$

1) Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée)

2) A l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

(…)

3) En déduire une valeur approchée de f(1)

Appeler l'examinateur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec n=10. Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque n=20 et n=30

(…)

Une analyse en termes d'activité potentielle des élèves révèle les difficultés de cet énoncé prévu pour des élèves de fin de terminale S. Par exemple, du point de vue mathématique, dès la première question, il faut reconnaître que la suite (y_k) est une suite géométrique avec une raison dépendante du paramètre *n*. Du point de vue de l'usage du tableur, la question 2 qui propose de reproduire et compléter un tableau nécessite la disponibilité de l'usage du $, ce qui ne peut se faire qu'en ayant compris le statut de paramètre du pas *n*. Du point de vue du caractère expérimental de la démarche, il n'y a ni observation à faire, ni conjecture à établir. Les commentaires donnés à propos de ce sujet à l'issue de l'épreuve 2007 soulignent « *contrairement aux autres sujets, on ne demande ici ni conjecture, ni démonstration : cet aspect est souligné et regretté dans plusieurs lycées…* »

Sophie s'empare cependant de ce sujet. Elle utilise les commentaires pour simplifier le sujet. Elle signale vouloir insister sur la valeur x_n lorsque le pas vaut 1/*n* en y consacrant une question. Elle signale également vouloir simplifier en n'utilisant que la notation $f(x_k)$ plutôt que la notion y_k qui complexifie inutilement. Le sujet devient le suivant

> Soit f une fonction définie et dérivable sur R vérifiant f(0)=1 et f'(x)=-2f(x) sur R
>
> On cherche à déterminer, en utilisant la méthode d'Euler des valeurs approchées de f(1) avec des pas différents.
>
> 1) On se place dans l'intervalle [0,1] en prenant un pas h=1/n…
>
> On pose x_0=0 et x_k+1=x_k + 1/n. Que vaut x_n ?
>
> *Appeler l'examinateur pour vérifier votre résultat.*
>
> 2) Dans le cas général d'un pas h=1/n
>
> Quelle est la formule donnant une approximation affine de $f(x_1)$?
>
> Quelle est la formule permettant d'exprimer $f(x_k+1)$ en fonction de $f(x_k)$?
>
> 3) A l'aide d'un tableur, construire un tableau permettant d'avoir des valeurs de x_k et les valeurs approchées de $f(x_k)$ dans le cas où n=10 (c'est-à-dire avec un pas h=0,1).
>
> (…)
>
> 6) Etude de la nature de la suite $f(x_k)$ définie dans le cas général avec un pas h=1/n.
>
> En déduire une expression de f(1) directement en fonction du pas.
>
> Retrouver les valeurs obtenues ci-dessus avec le tableur

Sophie tient compte aussi des commentaires concernant l'aspect expérimental du sujet. Au-delà des simplifications mathématiques, il y a une volonté de problématiser : chercher en utilisant la méthode d'Euler des valeurs approchées de f(1) sans savoir a priori que c'est exp(1). L'étude de la fonction *exp* correspond d'ailleurs au chapitre étudié par les élèves à ce moment là de l'année. Sophie cherche ainsi à introduire un caractère expérimental manquant à ce sujet, bien que cette absence soit signalée dans les commentaires comme un préalable fort.

Enfin, la progressivité dans l'usage du tableur est ménagée puisque l'usage du $ n'est nécessaire dans le sujet de Sophie qu'à partir de la question 6). Les difficultés restantes du côté des élèves sont liées à la présence simultanée de deux indices *n* et *k*, ce qui fait dire à Sophie après sa séance qu'elle s'y prendra autrement l'année d'après.

A la rentrée 2008, Sophie s'est renseignée sur le fait que ses élèves savent pour la majorité d'entre eux manipuler le tableur, mieux que l'année précédente, notamment la fonctionnalité de recopie liée à la notion de récurrence et qui avait posé problème l'année d'avant. Elle propose directement un sujet issu d'annales du baccalauréat 2008 mais ne mettant en fonctionnement que des connaissances anciennes de première S, précaution qu'elle avait déjà prise en 2007 en choisissant le sujet des suites hongroises. Le sujet est le suivant :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par

$a_0=20$ $\quad a_{n+1}=(2a_n+b_n)/4$

$b_0=60$ $\quad b_{n+1}=(a_n+2b_n)/4$

1) En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

2) Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et de la suite (b_n) ?

3) Soient (U_n) et (V_n) les deux suites définies, pour tout entier n, par

$U_n=a_n+b_n$ $\quad V_n=b_n-a_n$

a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (U_n) et (V_n).

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

c) Vérifier expérimentalement sur la feuille de calcul la conjecture émise, validée par l'examinateur.

4) Démontrer la conjecture de la question 3b).

(…)

Sophie s'appuie effectivement sur le fait qu'une majorité d'élèves peut dépasser simultanément les difficultés logicielles et les difficultés mathématiques pour entrer dans une démarche expérimentale nouvelle pour eux. La plupart des étapes que Sophie voit dans la démarche expérimentale sont d'ailleurs présentes dans ce choix de sujet, notamment observation, conjecture et confirmation expérimentale de cette conjecture avec le logiciel (question 3) c)). Ceci n'est pas sans poser de difficultés au cours du déroulement de cette séance. En effet, Sophie, même si elle attend seulement que les élèves fassent afficher le rapport U_{n+1}/U_n et fasse apparaître qu'il est constant égal à ¾ annonce ça comme une preuve avec l'ordinateur. Bon nombre d'élèves n'entrent pas dans ce jeu là dès que le travail sur tableur leur fait apparaître nettement cette conjecture. Un élève explique qu'il ne sait pas le faire avec l'ordinateur alors qu'il l'a fait sur sa calculatrice pour quelques valeurs de *n*. Un autre nous montre l'ambiguïté dans laquelle il est a été mis lorsqu'il demande si la convergence doit être « faite » sur l'ordinateur ou pas. Un autre enfin répond à Sophie quand elle lui demande ce qu'il peut faire pour « *prouver de façon percutante en utilisant l'ordinateur* », qu'il peut « *mettre en gras* ». Finalement, il y a pour bon nombre d'élève qui font l'impasse sur cette question de « *vérification avec l'ordinateur* », d'autant plus qu'elle s'articule difficilement avec la preuve papier crayon où il est nécessaire de prouver que U_n n'est jamais nul pour la démonstration du fait que U_{n+1}/U_n vaut toujours ¾. Cette démonstration et le travail de rédaction sont laissés en travail à la maison.

Le deuxième sujet en 2008 concerne à nouveau la méthode d'Euler mais ce nouveau sujet transformé par Sophie est maintenant bien loin du sujet 21 des annales 2007. Conformément à ses commentaires à l'issue de la même séance l'année précédente, il y a disparition des deux paramètres. L'ordre des questions est totalement renversé par rapport à la version 2007 et correspond mieux à une véritable démarche expérimentale, même si elle peut semble encore limitée : calcul de f(1) avec un pas de 1/10, puis de 1/20, puis de 1/50, puis en général pour retrouver les trois cas précédents et accéder à un pas 1/100.

Soit f une fonction définie et dérivable sur R vérifiant f(0)=1 et f'(x)=-2f(x) sur R

On cherche à déterminer, en utilisant la méthode d'Euler des valeurs approchées de f(1) avec des pas différents.

1) On se place dans l'intervalle [0,1] en prenant un pas h=1/10

On pose x_0=0 et x_k+1=x_k + 1/10. Que vaut x_{10} ?

Avec un tableur calculer les valeurs de f(x_k) pour k dans {0…10} ; En déduire f(1)

(…)

Appeler l'examinateur pour vérifier votre résultat.

2) Recommencer avec un pas de 1/20 (…)

3) Recommencer avec un pas de 1/50 (…)

Démonstration. Dans le cas général d'un pas de h=1/n (…)

Créer un tableau donnant f(1) directement en fonction du pas h=1/n pour n=10, 20, 50, 100.

Trois sujets de TP tableurs pour Clarisse en 2007-2008 et l'évolution en 2008-2009

Clarisse commence l'année 2007-2008 avec un TP sur le tableur qu'elle a confectionné elle-même. Il s'agit surtout pour elle d'introduire le tableur auprès de ses élèves. Trois exercices qui ne mettent en jeu aucune connaissance de terminale, ni même de première sont proposés : le premier ne comporte aucun contenu mathématique, le deuxième porte sur des suites arithmétiques et le troisième porte essentiellement sur le maniement de données numériques et sur la maximisation d'une fonction polynôme de degré 3 par lectures graphiques.

La prise en main du tableur est donc gérée sans avancée des connaissances mathématiques et les manipulations tableurs ne sont donc que de la familiarisation avec le logiciel. Il y a beaucoup de questions du style

Recopier la formule jusqu'en C3 avec la croix noire. Observer comment elle a été modifiée et expliquer pourquoi le résultat du tableur est 0.

Les potentialités du tableur ne sont pas exploitées en totalité. La puissance de la recopie vers le bas par exemple n'est pas visible puisqu'il n'est demandé que de recopier jusqu'à la troisième ligne. La terminologie utilisée dans l'énoncé est très proche de l'artefact (exemple : « la croix noire » plutôt que « la poignée de recopie », plus reliée à l'existence d'une formule récurrente). Les questions portent plus sur l'usage du tableur lui-même (« pourquoi le résultat du tableur est-il zéro ? » ; « Car le tableur arrondi les valeurs trop petites »). La démarche expérimentale est peu présente et les conjectures ne portent que sur les fonctionnalités du tableur, comme dans la question suivante :

> Si on recopiait la formule en C2 comme ci-dessus, quelle formule se trouverait en C2 ? Effectuer cette recopie pour vérifier.

Clarisse propose également à l'occasion de cette prise en main du tableur l'apprentissage de la fonctionnalité du $, qui peut être associé à la notion mathématique de paramètre. Cependant cette association n'est pas exploitée dans la question qui suit, sauf si les élèves peuvent répondre à un niveau mathématique, ce qui semble difficile compte tenu de l'énoncé.

> On souhaite toujours obtenir une suite arithmétique mais il faut que la raison soit dans la cellule C1 et que si l'utilisateur la modifie, toute la colonne A soit modifiée. (…)
>
> La formule en A2 s'écrit alors =A1+C1. La tirer vers le bas. Quel rôle joue le symbole $?

Dans l'exercice 3, plus mathématisé, des connaissances de la classe de seconde sur les fonctions doivent être mobilisées : lecture graphique de solutions d'inéquations f(x) plus grand que g(x), lectures graphiques de maximums… Le symbole $ introduit dans l'exercice 2 ne sert plus. Il y a peu d'activité de type expérimentale. Voici un extrait de cet exercice 3 :

> A l'aide des graphiques (des recettes et coûts de productions), répondre aux questions suivantes :
>
> - Est-il intéressant de fabriquer 100 objets, 400 objets, 750 objets ?
>
> - Dans quel intervalle doit se situer le nombre x d'objets pour que l'entreprise soit rentable ?
>
> - Déterminer le nombre d'objet pour lequel le bénéfice semble maximal
>
> Sélectionner le graphique puis le supprimer
>
> (…)
>
> A l'aide du graphique (des bénéfices), déterminer le bénéfice maximal que peut obtenir l'entreprise et le nombre d'objet pour lequel ce nombre est maximal.

Après ce premier TP d'initiation au tableur, Clarisse qui a communiqué avec Sophie au sein du groupe IREM entreprend de traiter le sujet des suites hongroises. Comme déjà signalé plus haut, ce sujet est bien adapté chez Sophie pour une prise en main puisqu'il met en jeu des connaissances de premières S à la rentrée et détaille suffisamment les questions tant du point de vue mathématiques que du point de vue instrumental. Du coup, les élèves de Clarisse qui ont déjà rencontré et utilisé la recopie n'ont pas de problème avec ce deuxième TP. Il ne leur apporte pas grand-chose du point de vu de l'outil mais leur permet de rentrer dans une démarche expérimentale qui est peut-être trop guidée pour la deuxième séance de TP de ces élèves.

Clarisse propose à ses élèves en 2007 une troisième séance TP sur le tableur. Mais contrairement à Sophie qui avait partiellement adapté le sujet 21 à partir des commentaires l'accompagnant, Clarisse le propose tel quel à ses élèves. Elle dit « *avoir voulu mettre ses élèves dans la situation de l'examen, sans leur donner d'indications en les laissant chercher tout seuls* ». Ces derniers éprouvent de nombreuses difficultés étant donné ce que nous avons signalé plus haut. Les genèses instrumentales des élèves ne sont pas gérées de façon linéaires : la fonctionnalité du $ qui avait été abordée à la première séance sans contenu mathématique consistant revient dans cette séance 3 sans indices. Les élèves doivent se souvenir de cette fonctionnalité car le pas est un paramètre de leur problème. En outre, la démarche expérimentale est absente dans ce sujet comme le signalent les commentaires. Quand bien même il s'agit d'un sujet de bac, Clarisse commente à l'issue de cette troisième séance le fait qu'elle a mal anticipé le travail des élèves : « *j'ai cru qu'ils auraient fini rapidement et j'avais ajouté un exercice à la suite. Il n'a pas du tout été abordé* ». Même si, contrairement aux conditions d'examen, elle autorise les élèves à communiquer entre eux, de nombreuses interventions individuelles de sa part sont nécessaires pour que tous avancent. Clarisse doit répéter de nombreuses fois les mêmes aides, pour toutes les questions. Il faut presque 20 minutes pour que les élèves terminent la question 1) (voir plus haut le sujet 21). Clarisse prend aussi conscience après cette troisième séance tableur que l'une des difficultés des élèves est l'utilisation de la fonctionnalité $. Elle conclut ses commentaires par la décision qu'elle adaptera le prochain sujet de type bac qu'elle proposera. Sur le sujet lui-même, elle dit avoir eu l'impression que ses élèves progressaient pas à pas sans vraiment comprendre ce qui se passait. Elle regrette d'avoir choisi ce sujet pour une séance de préparation à l'épreuve pratique, ce qui explique que l'année 2008-2009, ce sujet n'est pas repris dans la forme.

Le premier sujet de Clarisse pour l'année 2008-2009 est effectivement un sujet construit par elle à partir du sujet 21 sur la méthode d'Euler mais aussi à partir de son énoncé de prise en main 2007-2008. La première partie concerne la prise en main :

A) Prise en main du logiciel

1) Entrer 2 dans la cellule A1. Se positionner ensuite sur la cellule A2. Entrer la formule =A1+3. Valider. Changer le nombre dans la cellule A1 et observer le changement.

2) Positionner la souris dans le coin droit en bas de la cellule A2 pour faire apparaître une petite croix noire, cliquer et tirer alors vers le bas sur une dizaine de lignes puis relâcher. Indiquer ici la formule contenue dans la cellule A5 :

3) Soit (Un) la suite de nombres commencée dans la colonne A. Comment peut-on la définir ?

(…)

Cette prise en main est à la fois plus rapide et plus mathématisée. Par exemple la question 3) ci-dessus demande aux élèves de faire le lien entre les manipulations tableur et la notion de première S de suite géométrique définie par son premier terme et sa raison. L'entrelacement entre l'usage du logiciel et les mathématiques restent encore limité comme le montre par exemple la question suivante :

Afficher dans la colonne B, les termes de la suite définie par Uo=3 et Un+1=3/4 Un. Indiquer ici U14 environ égal.

Il n'est en effet demandé que la valeur de U_{14} mais pas la limite de la suite (U_n), ce qui constituerait un pont entre possibilités du tableur et nécessité d'argumentation mathématique. Il reste aussi une langage très proche de l'artefact (« une petite croix noire » plutôt que « poignée de recopie » qui ménage l'idée d'une notion mathématique associée) ainsi que des conjectures ne portant que sur le tableur et dont la vérification est immédiate si tant est que l'élève joue véritablement le jeu de ne pas vérifier avant d'émettre sa conjecture : « Quelle formule va-t-on obtenir ? Vérifier ? »

La deuxième partie de ce premier énoncé porte sur la méthode d'Euler. Bien qu'inspiré du sujet 21 de 2007, il est totalement réécrit par Clarisse.

B) Méthode d'Euler

1) Rappeler l'approximation affine de f(a+h) pour une fonction f dérivable en a et h voisin de 0 : (*connaissance mathématique mobilisable*)

2) On cherche maintenant des valeurs approchées d'une fonction f dérivable sur R et vérifiant pour tout x, f'(x)=f(x) et f(0)=1. Justifier que f(0,1)=f(0)+0,1f(0), que f(0,2)=f(0,1)+0,1f(0,1), que f(0,3)=f(0,2)+0,1f(0,2).

3) (…) Démontrez que pour tout entier naturel n, une valeur approchée de $f(x_{n+1})$ est $f(x_n) + 0,1\ f(x_n)$

4) Reproduire le tableau suivant dans une nouvelle feuille de calcul. Compléter à l'écran la colonne des valeurs approchées de $f(x_n)$. Attention : dans les formules, il faut faire référence à la cellule A2 pour pouvoir par la suite modifier son contenu.

(…)

5) Vérifier que les résultats s'actualisent quand on remplace le contenu de la cellule A2 par 0,5. (…)

6) Revenir à h=0,1. Représenter graphiquement ces valeurs à l'aide de l'option « Nuages de points reliés par une courbe ».

(…)

La connaissance mathématique (l'approximation affine d'une fonction), essentielle pour la méthode d'Euler, enjeu d'apprentissage en terminale, est explicitement appelée par l'énoncé dans la question 1). Il s'agit ensuite de l'appliquer de façon immédiate, notamment dans les questions 2) et 3). La question 4) sous entend l'utilisation par les élèves du $ qui a été introduit juste avant dans la partie « prise en main ». Du coup, l'énoncé est relativement facile pour une bonne partie des élèves de Clarisse et cette première séance se termine par 4 élèves qui jouent sur leur ordinateur en attendant la fin de la séance. Pour ce TP, les élèves doivent répondre aux questions sur la feuille d'énoncé distribuée mais ils ne doivent pas la rendre à l'enseignante.

En géométrie dynamique, évolution des séances de TP de 2007-2008 à 2008-2009

L'introduction de l'épreuve pratique est l'occasion pour les deux enseignantes de découvrir et d'utiliser pour la première fois en classe le logiciel Géogébra. Sophie propose comme premier sujet de géométrie dynamique un énoncé qu'elle a conçu elle-même. Ce sujet comporte deux parties bien distinctes. La première correspond uniquement à une prise en main du logiciel. Les contenus mathématiques supportant cette prise en main sont des contenus de première S :

parabole, tangentes à cette parabole et image de cette parabole par des isométries du type symétrie centrale, rotation, translation. La seconde partie correspond à un sujet zéro de l'année précédente 2006, repris sans adaptations. En particulier, le sujet zéro suppose la disponibilité du curseur de Géogébra associé au fait que le point A doit être défini paramétriquement. Mais cette fonctionnalité n'est pas travaillée dans la prise en main.

L'objectif de ce travail est de découvrir expérimentalement une propriété des tangentes à la courbe exponentielle, puis de la démontrer par le calcul.

1. En utilisant le logiciel Géogebra

Tracer la courbe c représentative de la fonction exponentielle. puis placer un point A mobile sur c, ainsi que la tangente en ce point à la courbe c. On note B le point d'intersection de la tangente et de l'axe des abscisses.

Appeler l'examinateur

Faire varier A sur la courbe et observer simultanément les abscisses de A et B.

Quelle propriété remarquable observez vous ? Imaginer une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture.

Appeler l'examinateur

2. Recherche d'une démonstration :

   On note A un point de c d'abscisse a et on cherche une équation de la tangente à c en A. Pouvez vous utiliser cette équation pour prouver votre conjecture ?

   Conclure.

Les évolutions entre 2007-2008 et 2008-2009 traduisent le développement professionnel de Sophie sur la gestion des genèses instrumentales : le sujet peut paraître globalement identique mais la question de la partie prise en main expliquant comment créer un point sur la parabole et le déplacer « à la main » à la souris devient une question où le point est créé par l'intermédiaire d'un curseur, qui joue le rôle de paramètre, et où le point peut être déplacé en jouant sur la valeur du curseur. Celui-ci est justement introduit en séance entière avec le vidéo projecteur la veille de la séance de TP. Il semble que suffisamment d'élèves ont d'ailleurs compris la fonctionnalité pour pouvoir aider les autres : l'un des élèves répond par exemple à une sollicitation d'un camarade en présence de Sophie par « *on a déjà tout fait hier, vous (l'enseignante) l'avez déjà montré (le curseur)* ». En outre, Sophie peut répondre aux élèves qui la questionnent sur le curseur par des explications au niveau mathématique « *c'est* *un réel qui varie, tu cherches* » (même si ensuite un élève répond plus au niveau de l'artefact « *c'est la 6ème icône* »). D'autres questions de prises en main, inutiles pour résoudre expérimentalement le problème mathématique posé dans le sujet zéro, sont supprimées (comme par exemple savoir créer l'image d'un point de la parabole par une isométrie).

Un exercice intermédiaire entre la nouvelle prise en main et le sujet zéro est également inséré en 2008-2009, permettant de faire une étape avant de proposer aux élèves un énoncé de type baccalauréat où des initiatives sont nécessaires. Dans cet exercice intermédiaire, la question du type « imaginez une méthode pour confirmer expérimentalement cette conjecture », qui est explicite dans le sujet de bac, n'est pas reprise telle quelle. Cependant, cette phase de l'expérimentation semble toujours importante pour Sophie « *fais apparaître les justifications de tes conjectures à l'écran* », « *je veux que vous utilisiez l'ordinateur pour faire apparaître la conjecture* »…. Cette phase n'est toujours pas bien comprise par les élèves. Dans cet exemple, Sophie, qui a introduit la commande « mesure de l'angle » dans la partie de prise en main, souhaite que ses élèves ne se contentent pas d'identifier visuellement que deux droites forment systématiquement un angle droit quelque soit la configuration. Elle souhaite que les élèves fassent afficher à Géogébra la valeur constante de l'angle. Le travail de démonstration mathématique doit être rédigé et rendu à la fin de la séance de TP.

De son côté, Clarisse propose pour introduire ses élèves à la géométrie dynamique avec Géogébra, deux fois le même sujet, sans évolution majeure entre les deux années. Pendant le déroulement du deuxième TP, en 2008-2009, Clarisse rajoute également pour tous les élèves une aide orale procédurale : « *il faut commencer par déterminer l'équation de la droite (AM)* ». Le sujet organise la prise en main par les élèves de Géogébra, mais pas explicitement la fonctionnalité de curseur car il n'y a pas de paramètres dans la situation. Du point de vue mathématique, le sujet porte sur la minimalisation d'une aire de triangle sous contrainte, c'est-à-dire une étude de fonction numérique, avec un calcul de dérivée et d'asymptote, ce qui est du programme de première S. Comme dans son exemple de sujet type pour une démarche expérimentale, Clarisse insère la figure dans son énoncé de TP, ce qui simplifie l'activité des élèves. De manière générale, le sujet est encore très fragmenté et dirigiste, avec des questions posées en terme de l'artefact : saisir, entrer, cliquer sur. La seule petite évolution de l'énoncé concerne une question aidant les élèves à identifier la loupe de Géogébra, qui est supprimée la deuxième année. Les deux années, des élèves ont fini avant la fin de l'heure. Pour ceux-là, elle propose un autre exercice dont elle annonce qu'elle le donnera en devoir maison. A un élève qui lui fait remarquer la deuxième année qu'ils n'ont pas nécessairement Géogébra chez eux, elle répond que ce n'est pas grave car en fait il n'y en a pas besoin. En sortant de la salle, Clarisse confie alors « *je n'arrive pas à poser les bonnes* *questions, qui les font réfléchir* », « *ils ne cherchent qu'à répondre aux questions* ».

La préparation véritable des élèves à l'épreuve pratique, en fin d'année 2007-2008

Lors de la deuxième réunion du groupe IREM, en janvier 2007, il est décidé que tous les enseignants proposent un sujet de TP inspiré par le sujet 4 ci-dessous extrait des annales de juin 2007.

Sujet 4

On se donne un réel k

On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln(x)=kx^2$ pour x strictement positif.

1) En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :

a) Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E) ;

Appeler l'examinateur pour valider la réponse

b) Si $k>0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

Appeler l'examinateur pour valider la réponse

2) Démontrer que pour $k<0$, l'équation (E) a une unique solution.

En effet, ce sujet est discuté durant la séance du groupe IREM et est jugé intéressant : les élèves, face à un problème dépendant d'un paramètre *k*, doivent mobiliser d'eux même le curseur de Géogébra (ou le menu adéquate de la calculatrice). Sur le plan mathématique, ils doivent transformer le problème de résolution d'une équation fonctionnelle en problème d'intersection de courbes. Le travail antérieur de la notion de paramètre, associé au maniement des logiciels, doit avoir permis aux élèves de distinguer correctement les paramètres des solutions de l'équation paramétrée. Le travail sur le logiciel permet aussi d'approcher la valeur de *k* pour laquelle le nombre de solution de l'équation change (0, 1 ou 2) mais ne permet pas aux élèves d'affirmer que cette valeur trouvée graphiquement est la bonne. Ils doivent donc travailler dans l'environnement papier-crayon pour retrouver cette valeur de *k*. Enfin, le travail sur logiciel ne permet pas de trouver les valeurs des solutions et donc nécessite de poursuivre le travail en papier crayon. Mais à chaque moment, les allers retours entre environnements permettent à l'élève de conforter ses propositions et de progresser.

Sophie propose effectivement ce sujet tel quel à ses élèves en février 2007. Cependant, ayant pris conscience de leurs difficultés avec la fonctionnalité de curseur à l'issue de son sujet de géométrie dynamique, elle réintroduit le curseur au vidéo projecteur, en classe entière, pour étudier une famille de courbes. De fait, ses élèves n'éprouvent plus de difficultés avec cette fonctionnalité dans la séance de TP qui a lieu quelques jours après. De son côté Clarisse propose en mars une version qu'elle a elle-même adaptée et qui prend en charge l'instrumentalisation du curseur qui n'apparaissait pas dans son TP de géométrie dynamique :

On donne un réel *k*. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. Lancer le logiciel Geogebra.
2. Dans le champ de saisie en bas, entrer f(x)= ln(x) puis valider. Entrer ensuite x^2, valider. Faire de même avec 0.5*x^2 puis 0.1*x^2 et enfin $-x^2$. Compléter le tableau :

Valeur de *k*				
Nombre de solutions d'après le graphique				

3. On veut désormais déterminer de manière plus précise le nombre de solutions. Cliquer sur Fenêtre puis Nouvelle fenêtre et faire apparaître la courbe de la fonction ln dans ce nouveau repère.
4. Entrer $k = 1$ dans la zone de saisie puis valider. Ce nombre apparaît dans la fenêtre Algèbre. Dans le champ de saisie, définir maintenant $g(x) = kx^2$.
5. Pour faire varier le nombre *k*, cliquer avec le bouton droit sur ce nombre et cocher Afficher l'objet. Un curseur apparaît. Cliquer sur l'icône  pour se mettre en mode Déplacer puis déplacer le curseur à la souris.
6. Conjecturer suivant les valeurs de *k* le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$.

Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.

7. Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de *k* à deux chiffres après la virgule pour laquelle l'équation admet une seule solution (on pourra faire un clic droit sur *k* puis dans Propriétés, Curseur, réduire l'incrément à condition de réduire aussi l'intervalle). *Appeler le professeur pour vérifier votre réponse.*
8. Démontrer sur feuille que, pour tout réel $k < 0$, l'équation $\ln(x) = kx^2$ admet une unique solution.

Dans ce sujet, la démarche expérimentale est mal menée par la fragmentation de la tâche en sous-tâches (questions 3, 4, 5 et 6). Par exemple, la mobilisation autonome du curseur associé à l'idée que le problème comporte un paramètre, le changement de cadre de l'énoncé initial, sont pris en charge par l'énoncé. En outre, l'activité expérimentale est initiée par le test de cas particuliers, ce qui pourrait rester du seul ressort des élèves (question 2). Le déroulement de la séance met en évidence la difficulté des élèves à entrer dans la démarche expérimentale attendue d'eux. Comme Clarisse le relate, « *certains n'ont pas bien vu le lien entre les courbes qu'ils avaient tracées et le fait qu'elles correspondaient à l'équation de départ avec différentes valeurs de k. Ils ne voyaient pas comment remplir le tableau* ».

3.c Conclusion sur Sophie et Clarisse

Nous donnons ici une conclusion intermédiaire concernant les genèses d'usage des technologies chez Sophie et Clarisse, en lien avec l'activité possible de leurs élèves.

D'un côté, Sophie, qui a au départ plus d'expérience que Clarisse avec les technologies et la démarche expérimentale, justifie et propose dès le début des énoncés de TP qui engagent plus nettement les élèves dans une activité mathématique de type expérimentale. Le processus qui s'opère chez Sophie pendant le suivi de cette recherche semble reposer sur une expérience déjà acquise, quand bien même le premier TP de Sophie est un TP avec des fiches professeurs repris d'un collègue expérimenté. Les sujets mettent en jeu des connaissances importantes de première S (suites géométriques, paraboles, premières isométries…) lorsqu'ils doivent permettent la prise en main des logiciels puis des connaissances enjeu ou en cours d'apprentissages quand les genèses instrumentales des élèves sont engagées. Les adaptations de connaissances, qu'elles soient liées à l'outil ou aux mathématiques semblent bien analysées et les difficultés, en particulier reliées aux genèses instrumentales des élèves, semblent dans la mesure du possible anticipées, voire aménagées d'une année à l'autre : utilisation du $ repoussée jusqu'à la nécessité, utilisation du curseur de Géogébra mal anticipée la première année puis introduite dans la prise en main l'année suivante…. L'articulation du travail des élèves en TP et le travail de l'écrit semble régulièrement prise en compte par des comptes rendus rédigés à rendre en fin de séance ou à la séance suivante, par l'impression parfois de leur travail par les élèves ou encore l'envoi de leur production par mail à l'enseignante. L'articulation des supports technologiques est aussi gérée par l'enseignante qui peut utiliser le vidéo projecteur entre des séances de TP pour faire des apports de connaissances nécessaires pour les TP suivants : l'utilisation du curseur notamment, après le TP où il a manqué la première année et avant le TP où il sera nécessaire la deuxième année. En outre, Sophie semble être en mesure la deuxième année de pouvoir gérer ses premières séances en exploitant l'aspect collectif des genèses instrumentales des élèves : d'un sujet tableur la première année repris chez Lubczanski, qui permet de gérer progressivement la prise en main du tableur par les élèves, elle démarre par un sujet type Bac la deuxième année, ne mettant en jeu que des connaissances de première S mais misant sur les aides que les élèves peuvent s'apporter les uns les autres. Reste cependant une remarquable stabilité liée à une représentation personnelle exprimée dans le questionnaire initial sur l'intérêt du logiciel, non seulement pour élaborer une conjecture, mais aussi pour la valider expérimentalement ; même si ce point de vue n'est pas toujours tenable dans la classe et même s'il pose des difficultés de compréhension à de nombreux élèves.

De l'autre côté, la genèse d'usage des logiciels chez Clarisse semble plus chaotique et plus limitée. La prise en main des logiciels organisée pour les élèves est systématiquement isolée des exercices qui ont un enjeu mathématique pour la classe de terminale. L'évolution porte seulement sur le niveau des connaissances qui supportent cette prise en main. D'une familiarisation sans contenus mathématiques ou au mieux des connaissances très anciennes (suites arithmétiques, lectures graphiques, fonction polynôme de degré 3…), ces prises en main se combinent comme chez Sophie avec des connaissances plus complexes à partir du milieu de la première année (prise en main de Géogébra mêlée à une étude de fonction rationnelle et des calculs de dérivées et d'asymptotes, prise en main du tableur plus directe et ancrée la deuxième année sur des révisions systématiques de suites définies par récurrences). Il est d'ailleurs intéressant d'observer que du point de vue de la gestion des prises en main et de l'intégration des TICE dans le travail mathématique, Sophie, plus habituée à utiliser le tableur que Géogébra avec ses élèves (ou bien la calculatrice qui n'a pas de fonctionnalités de géométrie dynamique) rejoint Clarisse sur Géogébra : prise en main plus isolée, proche de la familiarisation, qui contraste avec sa façon de gérer la prise en main du tableur, par le sujet de Lubczanski la première année et par un sujet type Bac la deuxième. Cependant, les contenus chez Sophie sont directement des contenus de première S. Il n'y a pas, comme chez Clarisse la première année, du travail sur des lectures graphiques ou des calculs de termes de suites arithmétiques, qui ne représente pas un enjeu véritable de révision pour les élèves et peut contribuer à la perte de temps déplorée par Clarisse pour l'avancée dans son programme.

Il reste cependant des limites et des chaos dans la genèse d'usage de Clarisse au niveau de l'organisation des genèses instrumentales des élèves. Limitée car par exemple la familiarisation aux logiciels reste la deuxième année très proche du langage artefact et reste aussi souvent isolée des mathématiques, comme dans cette question la deuxième année sur la valeur de U_{14} donnée par le tableur et non pas sur la limite possible de la suite. Limitée aussi car Clarisse ne semble pas articuler différents outils technologiques, reste concentrée sur des séances de TP en salle machine et ne semble pas prendre en charge non plus à l'occasion des TP le travail de rédaction ou le travail sur l'écrit nécessaire à ses élèves. Limitée enfin car Clarisse doit souvent répéter les mêmes aides à chacun des élèves, dans toutes les séances observées, se fatiguant toujours, alors que Sophie sait jouer sur l'aspect collectif des genèses, au moins à partir de la deuxième année. Cette genèse est aussi chaotique car Clarisse corrige quelques unes de ses erreurs la deuxième année, notamment l'introduction du $ quand il est nécessaire la deuxième année, mais ne corrige jamais celle du curseur dans sa prise en main de Géogébra, ce qui doit être assumé dans son adaptation du sujet 4 sur $\ln x = kx^2$. Tout se passe comme si Clarisse ne pouvait pas facilement repérer seule ces problèmes mêlant connaissances mathématiques et connaissances instrumentales alors que Sophie, quand bien même elle ne connaît pas mieux Géogébra que Clarisse au début de la recherche, peut adapter ses énoncés d'une année sur l'autre : introduction du curseur de Géogébra au vidéo projecteur la deuxième année, suppression de l'introduction à des fonctionnalités inutiles comme l'image par une isométrie.

Tout comme son développement au niveau des types de connaissances progressivement mises en jeu dans les TP de prise en main, le développement de Clarisse semble plutôt situé au niveau de la scénarisation globale des genèses instrumentales des élèves et non pas au niveau du détail de telle ou telle fonctionnalité. Clarisse propose en effet trois sujets tableurs la première année, introduisant et exploitant de façon désordonnée la prise en main globale de l'outil et les enjeux mathématiques : prise en main proprement dire de toutes fonctionnalités dans un premier temps, puis suites hongroises après Sophie, décalée dans le temps, qui n'exploite plus que la recopie et des connaissances anciennes de première S, et enfin énoncé de type bac trop tôt et trop complexe pour les élèves à ce moment de l'année, car nécessitant à la fois la disponibilité de la recopie et du $. Par contre, Clarisse propose ensuite un seul énoncé cohérent en 2008-2009. Du côté Géogébra, même s'il reste aussi des maladresses ponctuelles, au niveau de l'instrumentation du curseur par exemple, la prise en main articulée à des connaissances de première S est également plus en cohérence avec le scénario global, et ce dès le milieu de la première année : sujet sur géométrie et fonctions juste avant l'étude des fonctions de références de terminale puis adaptation du sujet 4 au moment de l'introduction du *ln*.

Du côté de l'introduction d'une démarche expérimentale dans l'activité des élèves, cet aspect linéaire de l'évolution chez Sophie se retrouve ainsi que l'aspect plus limité et chaotique chez Clarisse. Du sujet de Lubczanski qui organise l'entrée dans cette démarche la première année, Sophie semble s'accaparer rapidement ce qui est attendu d'elle. Dès la première année, elle introduit le caractère expérimental manquant dans le sujet 21, puis l'accentue l'année d'après même si le sujet a ses propres limites. Avec Géogébra, elle conserve les sujets de bac qu'elle propose aux élèves, elle conserve la version baccalauréat même si là encore certains sujets se prêtent mieux à la démarche, comme le sujet 4. Le sujet type qu'elle propose dans son questionnaire pour illustrer le mieux une démarche expérimentale reste en cohérence avec sa représentation personnelle de ce genre de sujet, l'activité potentielle des élèves y reste riche et y est simplifiée à la marge pour que cela reste raisonnable en classe. De son côté, Clarisse, éprouve des difficultés à proposer à ses élèves des sujets suffisamment ouverts pour permettre à cette activité de se développer. Sa seule expérience de sujet de type bac, sur la méthode d'Euler la première année, semble très douloureuse et explique certainement le chao quand elle dit qu'elle adaptera le prochain sujet de type bac qu'elle proposera. Même quand le groupe IREM lui redonne l'occasion d'expérimenter un énoncé type bac, avec le sujet 4 en fin de première année, elle réécrit totalement le sujet. Il est ainsi remarquable qu'il n'y ai donc pas de développement professionnel visible au niveau de la démarche expérimentale et que ces difficultés perdurent même la deuxième année avec les deux logiciels ; au point qu'en l'absence même de toute contrainte liée à la mise en place avec des élèves, le sujet type qu'elle propose dans son questionnaire ne permet pas non plus de développer ce genre d'activité.

4. Conclusion sur les genèses d'usage des technologies par des enseignants

Nous reprenons pour conclure notre hypothèse sur le fait qu'un enseignant qui débute avec l'utilisation d'un outil technologique ne dispose pas suffisamment d'automatisme et de routine à cet usage, ni de vision globale sur l'organisation d'un enseignement cohérent intégrant cet outil. Nous avons vu l'importance de ces automatismes au niveau micro qui semble influer fortement sur la composante médiative des enseignants expérimentés, hors contexte des technologies. Le niveau local est piloté par le niveau micro et de fait l'enseignant peut ainsi suivre son projet global.

Nos recherches sur les genèses d'usages par les enseignants de technologies, aussi bien ouvertes comme GéoGébra et le tableur ou fermées commes les BEL, permettent de conclure que les premières séances en classe sont toujours révélatrices de phénomènes qui conduisent l'enseignant à une gestion de sa séance « sur le tas ». Quand bien même sa séance est préparée, l'enseignant rencontre souvent des problèmes, en termes de déroulement notamment. Il prend alors appui sur sa pratique habituelle, ce qui lui permet de gérer au mieux sa séance au niveau local. Autrement dit, les automatismes qui régulent la pratique enseignante au niveau micro permettent à l'enseignant de gérer sa séance avec technologies. Chez Flore et Diane, ces automatismes concernent les aides à donner aux élèves (différenciées chez Flore, centrées sur les méthodes chez Diane) et cela permet aux élèves de rester en activité pendant les séances BEL. Chez Sophie, les habitudes de gestion, c'est-à-dire probablement en partie des automatismes au niveau micro, semblent permettre que les élèves s'engagent dans une activité mathématique de type expérimentale. D'ailleurs certains de ces automatismes issus de la pratique habituelle persistent : Sophie demande systématiquement tout au long de l'année à ses élèves, tout au long de l'année, de vérifier les conjectures émises, ce qui crée parfois des difficultés au niveau local car la vérification sur un logiciel ne signifie rien. Chez Clarisse, il ne semble pas y avoir de repères micro pour gérer les séances avec technologie, trop éloignées en termes de gestion de sa pratique habituelle. Clarisse éprouve durant les 2 années de la recherche des difficultés à proposer à ses élèves des sujets suffisamment ouverts pour permettre à l'activité attendue de se développer. Tout se passe comme si il n'y avait pas vraiment non plus, au début, de relais au niveau global : les successions d'énoncés proposés aux élèves sont incohérentes du point de vue de la progression dans les connaissances instrumentales. De ce fait, les choix au niveau local continuent à occuper toute la scène faute de suffisamment de relais aux autres niveaux micro et global : par exemple Clarisse répète souvent exactement les mêmes aides, à chacun des élèves ou binômes d'élèves, et dans toutes les séances observées sur deux années, se fatiguant toujours.

Chez Sophie, comme chez Flore et Diane, de nouveaux automatismes se construisent : Sophie semble par exemple être en mesure la seconde année de pouvoir gérer l'aspect collectif des genèses instrumentales des élèves, déléguant certaines aides individuelles liées à l'usage des logiciels aux élèves eux-mêmes. Chez Clarisse, les évolutions portent surtout sur un transfert du niveau local vers le niveau global : les prises en main des logiciels évoluent quant aux connaissances mathématiques qui supportent cette prise en main mais elles restent toujours isolées des exercices qui ont un enjeu mathématique. Il n'y a pas non plus d'articulation entre les séances de TP et les séances traditionnelles, comme si le manque de repères au niveau micro ne permettait pas à cette genèse (du local vers le global) de s'établir complètement. Aussi, chez Clarisse, les genèses d'usage correspondantes à des créations d'automatismes ne s'amorcent pas, en relation là encore avec une absence d'automatismes déjà là au niveau micro. Par exemple, Clarisse reconnaît toujours qu'elle a une tendance à « trop » simplifier les tâches qu'elle propose à ses élèves, soit par la forme des énoncés d'exercices, soit par les aides qu'elle leur fournit pendant les déroulements. Il semble que ce soit des caractéristiques de sa composante médiative fortement liées à sa composante personnelle et pilotées par des automatismes difficiles à déstabiliser.

En général, nos recherches tendent à montrer que les genèses d'usage s'observent surtout dans un mouvement limité du niveau local vers le niveau global : essentiellement des évolutions limitées, au niveau des scénarios et de la gestion prévue a priori (en lien avec la composante cognitive des pratiques), ce qui ne suffit pas à « décharger » le niveau local. La nécessité de gérer dans l'urgence les séances avec technologie conduit à verrouiller ce niveau local en préparant des séances très guidées, ce qui peut amorcer un cercle vicieux pour certains enseignants comme Clarisse. De façon générale encore, les mouvements nécessaires du local vers le micro et vers le global, « contraints » par les composantes des pratiques qui engendrent des rétroactions, peuvent expliquer les difficultés d'intégration pérennes de technologies chez certains enseignants, chez qui les activités à ces deux niveaux (micro et global) sont difficilement compatibles avec de telles genèses. Dans l'exemple de Sophie, tout se passe comme si sa pratique, ses composantes personnelle et médiative notamment, étaient dès le départ cohérente avec la possibilité de laisser les élèves en situation ouverte, permettant l'activité attendue chez les élèves. Dans l'exemple de Clarisse, tout se passe comme si un manque de précurseurs aux niveaux micro et global ne permettaient pas aux composantes médiative et personnelle d'évoluer.

Bibliographie du chapitre 3

ABBOUD-BLANCHARD M., CAZES C., VANDEBROUCK F. (2007) Teachers' activity in exercises-based lessons. Some case studies, Dans D. Pitta-Pantazi et G. Philippou (Eds.) *Actes de Conference of European society of Research in Mathematics Education (CERME 5)*. Larnaca (Chyprus). Février 2007.

ARTIGUE M. (2002) Learning mathematics in a cas environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol 7 (3). pp 245 -274.

GUEUDET G., TROUCHE L. (Eds) (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*, Rennes: Presse Universitaire de Rennes.

GUEUDET G., VANDEBROUCK F. (2011, à paraître) Technologies et études des pratiques enseignantes: études de cas et éclairages théoriques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 31 (3).

PARIES M., et al. (2007) *Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée - quelques exemples*. Documents pour la formation des enseignants, Numéro 9, Publication de IREM de Paris 7.

PARIES M., ROBERT A., ROGALSKI J. (2008) Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 68 (1). pp 55-80.

ROBERT A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2). pp 139-190.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59-68). Toulouse: Octarès Edition.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4). pp 505-528.

ROBERT A., ROGALSKI M. (2004) Problèmes et activitiés d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repères IREM*. Vol 54. pp 77-103.

ROBERT A., VANDEBROUCK F. (2003) Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 23 (3). pp 389-424.

VANDEBROUCK F. (2002) *Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques: à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants*. Cahier de Didirem, Numéro 42, Publication de IREM de Paris 7.

VANDEBROUCK F. (Eds) (2008) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouses: Octarès.

VANDEBROUCK F. (2010) Ressources et documents: le cas de la démarche expérimentale en mathématiques. Dans G. Gueudet et L. Trouche (Eds.) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.253-269). Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

Conclusion et perspectives

Nos travaux portaient sur l'enseignement des fonctions, du lycée jusqu'à l'université. Nous avons mis en évidence des domaines de travail, apparemment distincts et assez étanches, entre l'Analyse (l'étude des fonctions) telle qu'elle est pratiquée au début du lycée, l'Analyse attendue pour le baccalauréat (source d'activités différentes des élèves) et l'Analyse au début de l'université (Vandebrouck et la Commission Inter Irem Université 2008a, Vandebrouck 2011). Nous avons développé la notion de « perspective » : ponctuelle, globale ou locale qui peut être adoptée dans le travail sur les fonctions ; la perspective locale étant très peu, voire pas du tout travaillée au niveau du baccalauréat alors qu'elle est caractéristique de l'activité attendue des étudiants dans beaucoup des exercices d'Analyse à l'Université. Nous avons travaillé sur les conceptions des étudiants entrant à l'université à propos des fonctions. Nous avons trouvé des résultats selon lesquels certains élèves n'ont qu'une approche algébrique des fonctions, ne leur permettant pas d'adopter une perspective globale sur ces fonctions. Nous avons alors relié cette difficulté spécifique à la difficulté à résoudre des exercices en Analyse, caractéristiques de ce qui peut-être attendu au début de l'université. Ces résultats concordent avec ceux d'autres recherches (notamment Balacheff et Gaudin, 2002 et Monoyiou et Gagatsis, 2010).

Pour nos recherches, nous nous sommes placés dans le cadre général de la théorie de l'activité. Du côté des élèves, la prise en compte d'une activité avec des technologies nous a conduit à importer des concepts directement issus du schéma de double régulation de l'activité de Leplat (1997) et de l'activité instrumentée chez des professionnels (Samurcay et Rabardel 2004) : par ses actions sur la machine, le sujet élève, confronté à une tâche proposée, développe ce que nous qualifions de versant productif[15] de l'activité, qui peut induire la modification de la situation à laquelle il travaille et il développe aussi ses connaissances ou s'en construit de nouvelles (versant constructif de l'activité). Les actions et les rétroactions sont particulièrement observables dans des situations d'usage des technologies par les élèves et les étudiants. Elles permettent donc d'inférer de l'activité constructive sur le temps moyen ou long de l'action (temporalité de l'action). Ce point de vue directement issu de la théorie de l'activité et la didactique professionnelle nous a permis de dépasser le recours à l'approche instrumentale (Artigue 2002) pour adopter une perspective qui n'est pas uniquement centrée sur les genèses instrumentales des élèves. Toutes les tâches mathématiques, des applications immédiates (« gammes ») aux tâches appelant à la disponibilité et à des adaptations de connaissances, sont supposées être source d'acquisitions chez les élèves, c'est-à-dire induire chez les élèves de l'activité constructive. Cependant, nous prenons en compte aussi

[15] Ce mot de productif n'est pas toujours connoté positivement (la réussite de l'action), comme c'est le cas en didactique professionnelle.

l’environnement logiciel des tâches, c’est-à-dire toutes les difficultés, toutes les facilités ou les indices externes amenés par la machine et qui peuvent constituer ou non des aides à la réalisation des tâches et/ou à l’activité constructive.

Avec ces outils théoriques complémentaires, nous avons tout d’abord obtenu des résultats sur l’activité des élèves et des étudiants avec des bases d’exercices en ligne (Vandebrouck 2007, 2008), complétant les premiers résultats développés sans ces outils dans Cazes, Gueudet, Hersant & Vandebrouck (2006), Hersant et Vandebrouck (2006), Vandebrouck et Cazes (2005) : les bases d’exercices en ligne peuvent ne favoriser que le versant productif de l’activité des élèves (et des étudiants) si les enseignants ne développent pas un travail spécifique d’aides et d’intégration de leur usage dans la pratique habituelle de la classe. Elles peuvent accentuer l’hétérogénéité des élèves si l’enseignant n’est pas spécifiquement vigilant aux élèves en difficultés. Elles semblent bien adaptées pour un travail sur des exercices techniques, c'est-à-dire des exercices d’applications immédiates de connaissances explicitées ou disponibles chez les élèves. Notre travail sur les conceptions des étudiants entrant à l’université à propos des fonctions nous a également permis de contribuer au développement de situations d’usage des technologies au lycée, qui peuvent permettre d’enrichir l’approche algébrique, favoriser l’adoption des perspectives globale et locale sur les fonctions dans les différents registres de représentations (algébriques et graphique notamment) et préparer ainsi l’enseignement de l’Analyse à l’université.

Du côté des pratiques enseignantes, nous avons spécifiquement travaillé les genèses d’usage des technologies par les enseignants. Pour cela, nous avons développé la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert et Rogalski, 2002) comme cadrage théorique. En effet, la double approche s’est développée en lien avec des questions de recherches concernant des pratiques enseignantes stabilisées (par exemple dans nos premiers travaux portant sur les régularités dans l’utilisation par les professeurs de leur tableau noir et les effets potentiels en terme d’activité des élèves - Robert et Vandebrouck 2003). Articulant les concepts de la double approche à la problématique de l’évolution de l’activité enseignante en situation d’usage des technologies, nous avons tout d’abord précisé la manière d’intégrer les évolutions de l’activité des enseignants dans nos analyses de pratiques (Vandebrouck 2010, Gueudet et Vandebrouck 2011) : la double approche permet l’étude des pratiques du professeur à partir de diverses formes de son activité en situation d’enseignement avec les élèves. En particulier, nous avons conjugué stabilité, cohérence et complexité des pratiques enseignantes, déjà tout particulièrement travaillées dans ce cadre de la double approche, à l’évolution de l’activité sur le long terme, au fil des situations d’enseignement, en particulier lorsque des nouvelles technologies sont introduites dans la classe. L’activité du professeur évolue bien avec le temps mais c’est toujours le même sujet qui enseigne, indépendamment des situations spécifiques (type de séance, traditionnelle ou avec technologie, niveau d'enseignement…) avec des régularités afférentes sur les activités et les apprentissages des élèves.

En outre, la prise en compte de la dialectique activité productive / activité constructive au sein de la théorie de l'activité nous a permis là encore de dépasser les situations d'usages des technologies et les genèses instrumentales chez les enseignants, pour mieux prendre en compte l'ensemble du contexte de l'activité enseignante et « remonter » aux pratiques[16]. Les genèses d'usage des technologies par les enseignants, qui prolongent les genèses instrumentales, sont vues avec un versant externe qui correspond aux évolutions de l'activité productive des enseignants au fil des séances avec technologie et avec un versant interne, indissociable, lié à l'activité constructive qui accompagne ces évolutions (Abboud-Blanchard, Cazes, Vandebrouck 2009).

Cette mise en perspective issue de la double approche au sein de la théorie de l'activité permet donc de prendre en compte pour l'étude des genèses d'usage des technologies, non seulement le versant externe relié aux activités et aux apprentissages des élèves mais aussi la dialectique complexe entre stabilité des pratiques à un certain niveau et évolutions de l'activité en situation d'usage des technologies.

Nos perspectives tiennent d'une part dans l'élargissement de nos recherches sur les fonctions à l'ensemble du champ de l'Analyse au moment de la transition entre lycée et université, en exploitant les développements récents sur les espaces de travail mathématique introduits par Kuzniak (2066, 2010). Il s'agit de continuer à profiter des nouvelles technologies pour mieux préparer cette transition sous plusieurs aspects : enrichir nos scénarios pour introduire aux aspects formels de l'Analyse, auxquels les étudiants ne peuvent échapper dès le début de l'enseignement supérieur ; préciser davantage les scénarios à mener et mieux connaître ce qu'ils engagent chez les enseignants, pour rendre plus efficaces leurs adoptions ; questionner autrement certaines composantes et certains niveaux d'organisateurs des pratiques. D'autre part, nos perspectives visent à enrichir les analyses menées dans le cadre de la double approche, en articulation avec d'autres cadres théoriques (théorie de la médiation sémiotique et constructionnisme notamment, ce que nous avons déjà esquissé) et en articulation avec d'autres théories de l'activité (autre que les approches instrumentales et documentaires, ce que nous avons également esquissés à l'occasion de notre travail sur la démarche expérimentale).

[16] C'est-à-dire ne pas isoler l'étude de l'activité des enseignants en situation d'usage des technologies de leurs pratiques habituelles et ainsi mieux comprendre l'intégration ou non des technologies dans ces pratiques.

1. Une réflexion à mener sur des Espaces de Travail de l'Analyse

Le concept d'espace de travail mathématique (Kuzniak 2006, 2010) permet d'une part de questionner le travail à organiser sur les fonctions au sein d'un environnement mathématique plus complet, à savoir pour ce qui nous concerne, tout le champ conceptuel de l'analyse (réseau des concepts de l'Analyse). D'autre part, il permet d'enrichir l'approche du travail des élèves en dépassant l'étude de leur activité dans des situations locales précises (sur les fonctions). Ainsi la prise en compte d'ETA (espace de travail en Analyse) pourrait permettre de renouveler les analyses du travail des élèves en reliant des aspects locaux en termes de tâches, activités et déroulements à des caractéristiques plus globales. Par exemple cela pourrait contribuer à éclaircir les difficultés et les potentialisés de l'utilisation de majorations dans des tâches précises d'Analyse, en relation avec tout ce qui concerne l'enseignement de la relation d'ordre sur R. Plus généralement, cet outil permettrait de mieux questionner l'imbrication d'analyses à différentes échelles, à la fois des niveaux de conceptualisation visés et des processus organisées pour l'apprentissage. Pour les premiers, des études descendantes des programmes et manuels aux tâches précises seraient facilitées (les différents ETA de référence, idoine et personnels). Pour les seconds, cela semble permettre de mieux imbriquer les différentes genèses déjà travaillées indirectement (instrumentale, sémiotique, discursive).

La notion d'ETA, tout comme celle d'Espace de Travail Mathématique, reste cependant à approfondir pour la rendre plus opératoire dans nos études didactiques.

2. L'articulation de la double approche et d'autres éclairages théoriques

Avec la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes, nous nous inspirons d'hypothèses socio-constructivistes sur les apprentissages des élèves, suggérées par Piaget et Vygotsky, issues de la théorie des situations didactique (TDS), de la dialectique outil-objet, de la théorie de Duval sur les registres de représentations ou encore issus de l'approche instrumentale de Rabardel quand il y a apprentissage avec des technologies. C'est à chaque fois une certaine activité des élèves qui est étudiée, caractérisée par les mises en fonctionnement de connaissances mathématiques qu'ils sont amenés à faire et référée à une conceptualisation visée (produit) et à une manière de la réaliser (processus). Pour décrire les mises en fonctionnement des connaissances mathématiques et les conceptualisations, les outils proposés par la théorie des situations didactiques, la dialectique Outil-Objet et la théorie de Duval sont amplement utilisés.

Il est donc envisageable d'élargir ces outils pour mieux saisir les activités des élèves. Par exemple la description fine des différentes formalisations utilisées par les enseignants, qui doivent aboutir à installer chez les élèves des usages corrects du symbolisme mathématique, peut nécessiter des emprunts à certaines dimensions sémiotiques non encore utilisées dans nos recherches.

Dans le projet Remath, l'équipe Française et l'équipe Italienne ont proposé deux ingénieries avec Casyopée, la première, Française, fondée sur la théorie des situations didactiques, même si les idées de Douady, Duval et l'approche instrumentale guident aussi l'ingénierie, la deuxième, Italienne, basée sur la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini et Mariotti, 2008). Ces deux cadrages théoriques induisent des scénarios de nature très différente avec Casyopée, même si la tâche centrale proposée aux élèves est sensiblement la même (problème de maximisation de l'aire d'un rectangle dans un triangle). Dans Cazes, Maracci, Mariotti, Vandebrouck (2009), nous proposons des analyses a posteriori des expérimentations. En particulier, nous mobilisons des outils issus de la double approche pour analyser certaines données de l'expérimentation italienne. Cela conduit à des analyses complémentaires de ces données italiennes. Les Italiens identifient par exemple des choix de l'enseignant parmi des chaines sémiotiques qui émergent de la discussion entre les élèves et le professeur. Cela peut permettre de mieux comprendre la composante médiative dans les pratiques d'un enseignant. La double approche permet aussi des interprétations en termes de contraintes qui pèsent sur l'enseignant, qui, s'il n'opère pas certains choix de gestion, ne peut mener sa séance de discussion sereinement.

Dans un autre projet, nous allons vers une articulation de la double approche avec la théorie du Constructionnisme (Papert 1980). Les changements curriculaires actuels (développement de la démarche expérimentale, à laquelle nous nous intéressons dans le chapitre 2 de la note de synthèse) nous conduisent en effet à faire évoluer nos approches des apprentissages des élèves avec les technologies. Il s'agit d'évaluer, en utilisant la double approche, ce qu'une approche constructionniste nous apporte pour cela, ainsi que les faiblesses et les forces d'une telle approche dans notre contexte français. Dans le cadre du projet Remath, nous avons déjà été amenés à faire travailler des élèves avec le logiciel Cruislet, un environnement informatique pour la navigation dans l'espace géographique 3D à l'aide d'outils mathématiques. Intégrant le constructionnisme dans le design du logiciel, les concepteurs attendent que les élèves utilisent Cruislet pour « explorer » des idées mathématiques, en s'appuyant sur des représentations 3D auxquelles ils sont déjà familiers (google map, jeux vidéo) et sans connaissances spécifiques sur la géographie, sur la navigation d'avatars dans l'espace ou sur les coordonnées cartésiennes et sphériques. L'expérimentation française a été menée avec difficultés, quant à trouver des connaissances mathématiques enjeux d'apprentissages : trigonométrie et vecteurs. Toutefois le design de Cruislet a finalement permis l'existence d'une ingénierie qui a montré certaines forces du constructionnisme pour la démarche expérimentale : investir ce qui ressort spontanément des interactions entre élèves et faire du sens avec cela, le rôle du professeur étant d'intervenir stratégiquement pour aider les élèves à se concentrer sur le problème mathématique. Cependant il apparait que dans cette expérimentation, les mathématiques mises en jeu restent mixées avec des concepts relatifs à la géographie et à la navigation. Les mathématiques semblent n'avoir du sens que dans l'environnement Cruislet, alors que le professeur cherche aussi à les décontextualiser. Dans le projet Comenius, nous expérimentons également une situation de poursuite chasseur-proie qui bouscule nos habitudes d'enseignement et d'apprentissage. Nous espérons également en tirer un bénéfice pour enrichir l'activité liée à la démarche expérimentale attendue chez les élèves du lycée actuellement. Enfin, un dernier projet concerne une collaboration avec la Cité des Sciences et de l'Industrie, là encore pour enrichir nos approches et nos analyses des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (et plus généralement des sciences) mais à travers des dispositifs technologiques plus innovants et vers des publics dépassant celui des élèves et des étudiants.

Dans le cadre de tous ces projets, un travail coordonné entre enseignants, formateurs, chercheurs, et maintenant même médiateurs scientifiques, est indispensable. La double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes, replacée au sein de la théorie de l'activité, est pour nous le cadre qui permet ce travail coordonné.

Bibliographie de la conclusion

ARTIGUE M. (2002) Learning mathematics in a cas environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol 7 (3). pp 245 -274.

ABBOUD-BLANCHARD M., CAZES C., VANDEBROUCK F. (2009) Activités d'enseignants de mathématiques intégrant des bases d'exercices en ligne. *Quadrante, Special Issue ICT in Mathematics Education*. Vol 18 (1-2). pp 147-160

BALACHEFF N., GAUDIN N. (2002) *Students conceptions: an introduction to a formal characterization*. Cahier Leibniz, Numéro 65, Publication de Université Joseph Fourrier. http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00190425_v1/

BARTOLINI BUSSI M. G., MARIOTTI M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Dans L. English, et al. (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.746-783). New York and London: Routledge.

CAZES C., et al. (2006) Using E Exercises bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computer in Mathematics Learning*. Vol 11 (3). pp 327-350.

CAZES C., et al. (2009) Casyopée in the classroom: two different theory-driven pedagogical approaches, Dans *Actes de Conference of European society of Research in Mathematics Education (CERME 6).* Lyon, France. Janvier 2009.

GUEUDET G., VANDEBROUCK F. (2011, à paraître) Technologies et études des pratiques enseignantes: études de cas et éclairages théoriques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*.

HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2006) Bases d'exercices en ligne et phénomènes d'enseignement-apprentissage. *Repère IREM*. Vol 62. pp 71-84.

KUZNIAK A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technology*. Vol 6 (2). pp 167-188.

KUZNIAK A. (2010) L'espace de travail mathématique et ses genèses, Dans *Actes de Deuxième Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Work Space »*. 9-18. Paris.

MONOYIOU A., GAGATSIS A. (2010) Pre-service teachers' approaches in function problem solving: A comparative study between Cyprus and Italy. *Quaderni di Ricerca in Didattica Mathematica*. Vol 1-2. pp 9-23.

PAPERT S. (1980) *Mindstorms, Children, Computers, and Powerful Ideas*, New-York:

SAMURCAY R., RABARDEL P. (2004) Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. Dans R. Samurcay et P. Pastré (Eds.) *Recherches en Didactique Professionnelle* (Chapitre 7). Toulouse: Octarès.

VANDEBROUCK F. (2007) Une base d'exercices en ligne dans la classe de mathématique: activité des élèves et pratiques des enseignants, Dans G. Gueudet et Y. Matteron (Eds.) *Actes de Séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007.* ARDM et IREM de Paris 7.

VANDEBROUCK F. (2008a) Functions at the transition between French upper secondary school and University. Communication de la commission inter irem université (CI2U), Dans *Actes de ICMI.* Monterey, Mexico.

VANDEBROUCK F. (2008c) Résultats sur l'activité des élèves en classe de seconde. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.197-226). Toulouse: Octarès Edition.

VANDEBROUCK F. (2010) Ressources et documents: le cas de la démarche expérimentale en mathématiques. Dans G. Gueudet et L. Trouche (Eds.) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.253-269). Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

VANDEBROUCK F. (2011) Points de vue et domaines de travail en analyse. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 16. pp 149-185.

VANDEBROUCK F., CAZES C. (2005) Analyse de fichiers de traces d'étudiants: aspects didactiques. *STICEF*. Vol 12. pp 229-267.

Sommaire